O aumento do conhecimento é como uma esfera dilatando-se no espaço: quanto maior a nossa compreensão (simbolizada pelo volume da esfera), maior o nosso contacto com o desconhecido (a superfície da esfera).

PASCAL (1623-1662)

AGRADECIMENTOS

Queria em primeiro lugar agradecer a orientação do Professor Armando Leitão, sem a qual a concretização deste trabalho não teria sido possível. Os ensinamentos e conselhos foram determinantes em diversas fases da realização da tese.

Agradeço também ao Professor Guilherme Pereira a disponibilidade, o acompanhamento e sugestões ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao Departamento de Produção e Sistemas e, em particular, aos meus colegas do grupo de Optimização e Investigação Operacional pelo apoio.

Agradeço aos meus pais e irmãos pela confiança que depositaram em min.

Ao Daniel, agradeço a sua paciência e palavras de estímulo, principalmente nas fases mais críticas, em que o meu pessimismo vinha ao de cima.

Quanto à Ema, ela tem sido em todos os momentos uma fonte de motivação e alegria.

Resumo

O presente trabalho incide sobre um sistema que é designado na literatura anglo-saxónica por "*Maintenance Float System*". Um *Maintenance Float System* típico é constituído por uma estação de trabalho, um centro de manutenção e um conjunto de equipamentos de reserva disponíveis para substituir os equipamentos avariados. A estação de trabalho é constituída por um conjunto de equipamentos activos e idênticos e, no centro de reparação, um número limitado de equipas de manutenção está disponível para efectuar as reparações aos equipamentos avariados. Neste trabalho considera-se que as equipas de manutenção, para além das reparações, também efectuam revisões periódicas aos equipamentos.

Um modelo matemático foi desenvolvido para permitir encontrar a melhor combinação dos três parâmetros: o número de equipamentos de reserva, R, o número de equipas de manutenção no centro de manutenção, L e o intervalo de tempo entre duas revisões consecutivas, T. A estratégia seguida para construir o modelo envolveu: o desenvolvimento de equações diferenciais, de forma a determinar as probabilidades de estado do sistema; a definição de um ciclo de operação e determinação da sua duração; a identificação e determinação dos custos incorridos num ciclo; e a utilização de uma metodologia de pesquisa para determinar a combinação dos parâmetros que minimiza o custo total de manutenção de um determinado sistema.

O modelo desenvolvido permite encontrar a combinação óptima dos parâmetros com base nos custos de manutenção do sistema. No entanto, também foram determinadas expressões para outras medidas de desempenho, tais como: a probabilidade de ocorrer fila de espera,

o comprimento médio da fila de espera, o número médio de equipamentos em falta na estação de trabalho, etc.

ABSTRACT

The system that has been analysed in this work is called Maintenance Float System. A typical Maintenance Float System consists of three components: an operation workstation, a repair centre, and a set of standby float units in inventory which must be available for replacing units sent for repair. The workstation is composed by a set of identical units and, in the repair centre, a fixed number of crews are available to perform repair actions. In this work, it is considered that crews perform both repairs and overhauls at regular time intervals.

A mathematical model has been constructed to find out the best combination of three parameters: the number of standby units, R, the number of maintenance crews in the maintenance centre, L and the time between overhauls, T. The strategy followed to construct the model involved: the development of differential equations in order to determine system state probabilities; the definition of an operating cycle; the calculation of the cycle duration and respective total maintenance system cost incurred; and the utilization of a search method to find out the combination of parameters that minimizes the total cost of a specific system.

The model developed allows to find out the optimal combination of the system parameters based on the maintenance system cost. Expressions for other system performance measures have also been derived, such as the probability of waiting in the queue, the average queue length, the average number of down equipments, etc.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

CAP 1. INTRODUÇÃO

1.1. Âmbito

O aumento da automação dos processos produtivos, com a utilização de robôs, de sistemas automáticos e de veículos de transporte, assim como a adopção de novas abordagens tais como o JIT (*Just In Time*) e o TQM (*Total Quality Management*) tornaram a fiabilidade e a manutenção duas áreas de especial importância, tanto na fase de concepção ou selecção de um equipamento como ao longo de todo o seu ciclo de vida.

Num passado não muito distante, os custos de manutenção representavam uma elevada percentagem dos custos de operação. As acções de manutenção eram essencialmente correctivas e os custos associados considerados como um mal necessário.

Hoje em dia, com a intensa pressão competitiva, as empresas procuram aumentar a sua eficiência e alcançar vantagens competitivas através de todas as fontes possíveis, nomeadamente através da redução de inventários, da adopção de novos paradigmas de produção, do aumento da qualidade dos seus produtos recorrendo a programas de melhoria contínua e, também, do aumento da eficiência dos seus equipamentos produtivos. Tornou-se evidente que as paragens e a redução da eficiência dos equipamentos têm um impacto directo na produtividade do processo produtivo.

É ainda importante salientar que o controlo e optimização da manutenção dos equipamentos é não só importante do ponto de vista dos resultados operacionais dos sistemas, reflectindo-se no

desempenho da organização, como do ponto de vista da segurança da implantação e, em certos casos, do impacto no meio envolvente.

Conscientes da importância da manutenção, diversas organizações implementaram uma abordagem como a Manutenção Produtiva Total (TPM – *Total Productive Maintenance*), que procura maximizar a eficiência do equipamento através do envolvimento dos operadores e implementar a manutenção autónoma, e a Manutenção Centrada na Fiabilidade (RCM – Reliability–Centred Maintenance), que consiste numa metodologia para determinar a manutenção preventiva necessária que maximiza a fiabilidade do equipamento ou sistema.

Qualquer acção de manutenção num processo produtivo, seja ela correctiva ou preventiva, tem como objectivo assegurar o correcto funcionamento dos equipamentos e obter a maior disponibilidade possível. A realização de manutenções preventivas aumenta o controlo sobre os equipamentos e evita as paragens inesperadas. No entanto, se as acções de manutenção forem excessivas, o custo resultante será elevado. Sendo assim, quando se procura alcançar a máxima eficiência do equipamento, todos os tipos de acções de manutenção devem ser considerados e os custos envolvidos devem ser ponderados.

Esta questão tem vindo a ser investigada na literatura por diversos autores. Existem vários modelos que se propõem encontrar a melhor política de manutenção para determinados equipamentos, tendo em conta a sua fiabilidade e os custos associados às avarias e às acções de manutenção preventiva. Existem ainda modelos que permitem determinar se é preferível continuar a trabalhar com um determinado equipamento ou substituí-lo.

Para sistemas produtivos que envolvem vários equipamentos idênticos ou equipamentos cujos componentes ou subconjuntos são idênticos, torna-se vantajoso fazer uma gestão conjunta dos recursos de manutenção, sejam eles humanos ou materiais. Na indústria, o recurso a equipamentos de reserva é uma prática corrente e permite minimizar os custos directos e indirectos originados pela paragem de um determinado equipamento, garantindo a taxa de produção planeada.

Com este propósito, surgem modelos na literatura para modelar sistemas formados por um conjunto de equipamentos idênticos em funcionamento paralelo. Estes sistemas são designados na literatura anglo-saxónica por *Maintenance Float System*.

1.2. Descrição do Sistema

Os *Maintenance Float Systems* são basicamente formados por uma estação de trabalho, em que um conjunto de equipamentos idênticos e independentes estão a trabalhar; um centro de manutenção, onde são realizadas operações de manutenção por uma ou mais equipas de manutenção; e equipamentos de reserva que apoiam a estação de trabalho. Os equipamentos de reserva substituem os equipamentos sujeitos a operações de manutenção para assegurar, sempre que possível, a produtividade máxima ou "normal" do sistema. Um equipamento cuja manutenção é finalizada no centro de manutenção é considerado como um equipamento de reserva.

Esta configuração pode ser encontrada em diversas implantações fabris e representa a configuração de diversos sistemas de transportes de mercadorias ou de passageiros (aéreos, rodoviários ou ferroviários). O equipamento pode ser o sistema de transporte ou um dos seus subsistemas. Da mesma forma, no caso de uma implantação fabril, o estudo pode incidir sobre a máquina ou sobre um dos seus subconjuntos. Utiliza-se a designação equipamento por esta ser a designação mais abrangente.

O problema da determinação do número de equipas de manutenção necessárias para o sistema pode ser resolvido tendo em atenção apenas um factor - o número de equipamentos que necessitam de uma reparação num determinado intervalo de tempo. Neste caso, as implicações da contratação de mais uma equipa de manutenção teriam de ser ponderadas com base nos custos actuais do sistema. A aquisição de um equipamento de reserva também pode ser decidido,

tendo em conta os custos actuais e ignorando a possibilidade de se alterar o número de equipas de manutenção. No entanto, para optimizar a eficiência de um sistema é necessário fazer uma análise conjunta de todos os factores (ou dos factores principais) que a podem influenciar. A complexidade do problema aumenta com o número de factores que se consideram no modelo.

A definição do número mais adequado de equipas de manutenção permite que se diminua o tempo de espera pela intervenção, diminuindo o tempo de paragem dos equipamentos e evitando que os encargos com a mão de obra se tornem demasiado elevados. A existência de equipamentos de reserva também permite evitar que se incorram em perdas de produção elevadas devido à paragem dos equipamentos quando ocorrem avarias e assegurar que os compromissos assumidos com os clientes sejam cumpridos. Quanto mais frequentes forem as avarias maior será a necessidade em equipas de manutenção e equipamentos de reserva.

A ocorrência de avarias é naturalmente indesejável e, sempre que for possível e economicamente justificado, deve ser evitada. Quando não é possível reduzir ou eliminar a sua ocorrência, pode-se tentar identificar algum sinal (inspecção) que permita deduzir que a falha estará iminente. Uma das componentes do custo associado à falha de um equipamento está relacionada com a imprevisibilidade da ocorrência da falha. O facto de não se saber se e quando a avaria vai ocorrer obriga a manter um inventário de itens de reserva elevado ou incorrer em perdas de produção elevadas devido ao tempo de espera para aquisição de itens sobressalentes. O tempo de paragem inclui, para além do tempo de espera e do tempo de reparação, o tempo destinado à identificação da avaria. Acrescenta-se ainda, em certos casos, um custo associado à eventual destruição ou danificação, no decorrer da falha, de outros itens inseridos no sistema e um custo de perda de qualidade do serviço ou produto antes de ocorrer a avaria.

Ao contrário das acções de manutenção correctiva, as acções de manutenção preventiva ou revisões são planeadas permitindo que o tempo de paragem seja minimizado. O tempo de espera para aquisição de sobressalentes e o custo de posse de inventários podem ser eliminados ou reduzidos. Por estas razões, o custo de efectuar uma revisão é geralmente inferior ao custo incorrido para realizar uma reparação.

A realização de revisões em intervalos de tempo constantes origina geralmente uma diminuição nos custos de manutenção porque permite evitar a ocorrência de algumas avarias. A taxa de avarias do equipamento diminui, como resultado da substituição de componentes com função de risco crescente e da verificação dos equipamentos, mudanças de óleo, lubrificação, etc..

Desta forma, considera-se no presente trabalho a possibilidade de submeter os equipamentos activos a revisões periódicas. As revisões são realizadas no centro de manutenção, sempre que um equipamento permanece em funcionamento T unidades de tempo sem avariar.

Designa-se por M, o número de equipamentos idênticos e independentes que devem estar a trabalhar em simultâneo para assegurar a capacidade máxima de funcionamento, e designa-se por L o número de equipas de manutenção que realizam indiscriminadamente operações de reparação e revisão.

Para ilustrar o problema que se pretende analisar, representa-se na figura 1 um sistema constituído por um grupo de três máquinas idênticas. Os tempos t_1 representam os tempos de paragem devido a manutenções preventivas, os tempos t_2 representam os tempos de paragem devido a avarias e T representa o intervalo entre revisões.
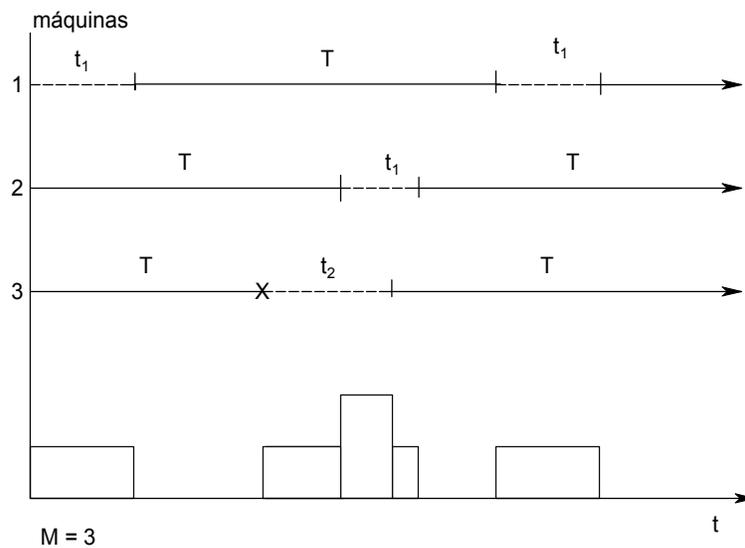
Figura 1: Número de máquinas inoperacionais em cada instante

A figura 1 apresenta ainda um histograma que totaliza o número de máquinas inoperacionais em cada instante de tempo, somando o número de máquinas avariadas com o número de máquinas em revisão.

Considerando que existem R máquinas de reserva disponíveis, não haverá máquinas em falta se o número de máquinas avariadas e em revisão for inferior a R. Caso contrário, o número de máquinas em falta será dado pela diferença entre o número de máquinas avariadas e em revisão e o número de máquinas de reserva.

1.3. Objectivo

O objectivo deste trabalho é construir um modelo que permita determinar a eficiência do sistema descrito e possibilite posteriormente a determinação da melhor combinação do número de equipamentos de reserva, do número de equipas de manutenção e do intervalo entre revisões.

A melhor medida de desempenho para um sistema como este depende essencialmente das particularidades do sistema que se estiver a analisar. Existem várias medidas de desempenho possíveis, tais como:

o comprimento médio da fila de espera, o número médio de equipamentos activos na estação de trabalho, a utilização média dos equipamentos etc.. No entanto, quando se pretende decidir sobre a compra e posse de equipamentos ou sobre a contratação de pessoal, a medida de desempenho que mais peso tem na tomada de decisão é o custo. As outras medidas de desempenho, tais como as anteriormente citadas, podem ser utilizadas como restrições do problema, nos casos em que se justificar (por exemplo, limitar ao máximo o número de falhas por estas conduzirem a situações de risco para a segurança e saúde dos operadores ou clientes, ou assegurar que a disponibilidade do sistema se mantenha num determinado nível) ou como mera indicação do que se pode esperar do sistema.

Tendo sido escolhida a forma de medir a eficiência do sistema, o objectivo do trabalho pode agora ser definido de uma forma mais precisa: a construção de um modelo que permita determinar a configuração óptima de um determinado sistema (determinação dos valores de R e L) e a política óptima de manutenção (determinação do valor de T) que minimiza o custo total de manutenção.

1.4. Metodologia e Organização da Dissertação

Existem diversos custos associados à laboração do sistema de manutenção em análise, mas o custo de perda de produção é o que traz mais dificuldade na sua determinação. O custo de perda de produção depende da duração do intervalo de tempo durante o qual o serviço deixa de ser assegurado por falta de equipamentos disponíveis. Para se poder determinar esse intervalo de tempo, é necessário conhecer o número de equipamentos inoperacionais em cada instante de tempo. Por esse motivo, o desenvolvimento deste trabalho decorreu em duas etapas subsequentes. A primeira etapa consistiu na determinação das probabilidades de estado do sistema para o estado estacionário e a segunda consistiu no desenvolvimento de um modelo de custos baseado nas probabilidades de estado obtidas. O modelo de custos desenvolvido permite avaliar em termos económicos qualquer

combinação dos três parâmetros do modelo: o número de equipamentos de reserva R, o número de equipas de manutenção L e o intervalo entre revisões T. Para permitir encontrar a combinação dos três parâmetros do modelo que minimiza o custo total, procurou-se definir e implementar um algoritmo de pesquisa.

O documento foi estruturado em nove capítulos que seguem um pouco a evolução do trabalho e inicia-se com a definição do sistema e problema a tratar no presente capítulo.

No capítulo 2 apresentam-se alguns conceitos e fundamentos. O objectivo é introduzir alguns métodos quantitativos e conceitos necessários para melhor se compreender os modelos de manutenção que se encontram na literatura, desde os modelos de manutenção individual até aos modelos que envolvem vários equipamentos em paralelo, como é o caso do sistema que é objecto deste trabalho.

O capítulo 3 retrata as políticas e modelos de manutenção que se encontram na literatura, classificando-os segundo a sua especificidade.

No capítulo 4, define-se uma expressão matemática que descreve a forma como as manutenções preventivas periódicas influenciam a taxa de avarias dos equipamentos e apresenta-se o modelo desenvolvido para determinar as probabilidades de estado do sistema.

No capítulo 5 define-se um ciclo de operação e determina-se a sua duração média com o objectivo de determinar o custo total de manutenção do sistema por unidade de tempo. Os diferentes custos incorridos no ciclo são identificados e as suas expressões são determinadas.

No capítulo 6 são definidas as expressões de várias medidas de desempenho relevantes para o sistema em estudo.

A análise de resultados é feita no capítulo 7. Analisa-se o efeito da alteração do número de equipamentos de reserva, do número de

equipas de manutenção e do intervalo entre revisões, nas várias medidas de desempenho adoptadas, incluindo os custos.

O capítulo 8 trata da metodologia de pesquisa da solução de menor custo e o capítulo 9 apresenta as conclusões.

CAP 2. CONCEITOS E FUNDAMENTOS

Neste capítulo são abordadas as matérias cujo conhecimento é imprescindível para analisar e propor um modelo para o sistema em estudo, assim como para melhor entender os modelos de manutenção existentes na literatura que serão abordados no capítulo a seguir.

Na primeira secção definem-se os processos estocásticos tendo em vista a modelação do processo de falha dos equipamentos, que é indispensável para se poder deduzir o número de chegadas que ocorrem em cada instante no centro de manutenção.

Tendo em conta que o sistema em análise pode ser visto como um sistema de fila de espera em ciclo fechado, tendo já sido tratado como tal por diversos autores, apresenta-se resumidamente, no secção 2, a teoria relativa às filas de espera.

Na secção seguinte introduzem-se algumas noções de fiabilidade, faz-se nomeadamente a distinção entre sistema reparável e sistema não reparável.

Na quarta e última secção classificam-se os tipos de manutenção e descrevem-se as medidas de desempenho de tais políticas, incluindo os custos de manutenção.

2.1. Processos Estocásticos

O processo estocástico é uma abstracção matemática de um processo cujo desenvolvimento é governado por leis de probabilidade. Do ponto de vista matemático, um processo estocástico é definido por uma

família de variáveis aleatórias, {X(t), t $\in$ T}, definidas no conjunto T. O conjunto T é por vezes definido como um espaço de tempo, e X(t) define o estado do sistema no instante t. Dependendo da natureza do espaço de tempo, o processo é classificado de processo com parâmetro discreto ou com parâmetro contínuo; i. e., se T é uma sequência de variáveis discretas T= {0, ±1, ±2, ...} ou T={1,2,..}, então o processo estocástico {X(t), t $\in$ T} é chamado de processo com parâmetro discreto, se T é um intervalo ou uma combinação algébrica de intervalos, por exemplo, T= {t: -∞ <t < +∞} ou T={t: 0 <t < +∞}, então o processo estocástico {X(t), t $\in$ T} é chamado de processo estocástico com parâmetro contínuo.

2.1.1. Processos Renováveis

Seja N(t) (t ≥ 0) o número de falhas (renovações ou substituições) durante o intervalo (0,t]. Se os tempos entre falhas x_1, x_2,.. forem variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, o processo estocástico resultante {N(t), t ≥ 0} é chamado processo de renovação, em que F(t)= P($x_k \leq t$) (k= 1, 2,..). O tempo para a falha n é de $S_n= x_1+ x_2+...+ x_n$, em que S_0= 0 e n= 1, 2,... Uma vez que o número de falhas até t (≥0) é N(t)= max{n: $S_n \leq t$}, vem que P(N(t) ≥ n)= P($S_n \leq t$). Então, a probabilidade de o número de falhas até t ser exactamente n é dado por:

$$P(N(t)= n)= Pr(N(t) \geq n) - Pr(N(t) \geq n+1) \qquad (2.1)$$

$$= Pr(S_n \leq t) - Pr(S_{n+1} \leq t)$$

$$= F^{(n)}(t)- F^{(n+1)}(t), \qquad n=0, 1,...$$

Então a função de renovação M(t) é definida como o valor esperado de N(t) para t fixo. Isto é,

$$M(t)= E[N(t)]= \sum_{n=1}^{\infty} nP(N(t) = n) \qquad (2.2)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(N(t) \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k \leq t)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t)$$

Assumindo que F é diferenciável, a taxa de renovação pode ser dada por:

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(t) \qquad (2.3)$$

Em geral, a taxa de renovação varia inicialmente com o tempo e tende assimptoticamente para uma constante m=1/E[x].

Se o processo de renovação é um Processo de Poisson Homogéneo, os tempos entre falhas x_1, x_2,.. ,x_n seguem uma distribuição Exponencial Negativa com média 1/λ (>0), i.e. F(t)=1-exp(-λt). O tempo para a falha n (S_n) corresponde a soma de n variáveis provenientes de uma distribuição exponencial, sendo a distribuição de Probabilidade $F^{(n)}(t)$ respectiva uma distribuição Gamma (convolução de n distribuições Exponenciais Negativas).

2.1.2. Os Processos de Markov

Um processo estocástico com parâmetro discreto {X(t), t= 0, 1, 2...} ou um processo estocástico com parâmetro contínuo {X(t), t>0} é chamado de processo de Markov se, para qualquer conjunto $t_1<t_2<..<t_n$ no conjunto ou espaço de tempo do processo, a distribuição condicional de $X(t_n)$, dados os valores de $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_3)$,.. .,$X(t_{n-1})$, depende apenas do valor imediatamente anterior, $X(t_{n-1})$; isto é, para qualquer número real x_1, x_2, ..., x_n,

$$P(X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1,..,x(t_{n-1}) = x_{n-1}) = P(X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}). \qquad (2.4)$$

Uma cadeia de Markov é descrita por uma sequência de variáveis aleatórias discretas, $X(t_n)$, em que t_n toma um valor discreto ou

contínuo, isto é, uma cadeia de Markov é um processo de Markov com um espaço de estados discretos.

2.1.3. Processo de Poisson e a Distribuição Exponencial Negativa

A distribuição de Poisson descreve situações em que os acontecimentos ocorrem aleatoriamente e com uma taxa constante. Estas situações são descritas por um Processo de Poisson Homogéneo. Um Processo de Poisson Homogéneo é um processo estacionário em que a distribuição do número de acontecimentos (independentes entre si) que ocorrem em intervalos de tempo ou espaço iguais é a mesma, independentemente de onde (ou quando) se dá o início do intervalo.
A expressão da distribuição de Poisson para um intervalo $(t_1,t_2]$ é a seguinte (de tal forma que $t_2>t_1\geq 0$):

$$P_n(t_2-t_1)=\frac{e^{-\lambda(t_2-t_1)}.(\lambda.(t_2-t_1))^n}{n!} \tag{2.5}$$

(para n= 0, 1, 2,...)

λ designa a taxa média de ocorrência do acontecimento e $\lambda.(t_2-t_1)$, o número esperado de acontecimentos no intervalo $(t_1,t_2]$.
Num processo de Poisson *não* Homogéneo, o processo não é estacionário. A distribuição do número de acontecimentos num intervalo de comprimento fixo muda em função do instante em que se inicia o intervalo. Os acontecimentos discretos podem ocorrer a uma taxa crescente ou decrescente. A distribuição dos acontecimentos num processo de Poisson não Homogéneo é dada pela seguinte expressão:

$$P_n(t_2-t_1)=\frac{e^{-\int_{t_1}^{t_2}\rho(t)dt}.(\int_{t_1}^{t_2}\rho(t)dt)^n}{n!} \tag{2.6}$$

Em que $\int_{t_1}^{t_2} \rho(t)dt$ representa o número médio de acontecimentos no intervalo $(t_1,t_2]$.

Em suma, um processo de Poisson Homogéneo descreve uma sequência de variáveis aleatórias independentes, distribuídas idêntica e exponencialmente. Um processo de Poisson não Homogéneo é descrito por uma sequência de variáveis aleatórios que não são independentes, nem identicamente distribuídas.

2.1.4. A Distribuição Exponencial Negativa e a Distribuição Gamma

A distribuição Gamma é uma extensão da distribuição Exponencial Negativa. Pode ser derivada considerando o tempo para k chegadas sucessivas num processo de Poisson ou, da mesma forma, pela consideração da convolução de ordem k de uma distribuição Exponencial Negativa. A distribuição Gamma é a distribuição contínua análoga à distribuição Binomial Negativa, que pode ser obtida pela consideração da soma de k variáveis provenientes de uma distribuição Geométrica.

Considerando uma distribuição Exponencial Negativa com parâmetro λ, a distribuição Gamma correspondente é dada por:

$$f^{(k)}(t) = \lambda^k . \frac{t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)} \tag{2.7}$$

em que $\Gamma(k)$ é a função Gamma standard

$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx$, definida para k>0

Depois de integrada, obtém-se

$$\Gamma(k) = (k-1).\Gamma(k-1) \tag{2.8}$$

Para k inteiro,

$$\Gamma(k) = (k-1)! \qquad (2.9)$$

Para valores inteiros de k, a função densidade de probabilidade Gamma é também conhecida como a função densidade de probabilidade de Erlang; e, se k=1, a distribuição Gamma corresponde à distribuição Exponencial Negativa.
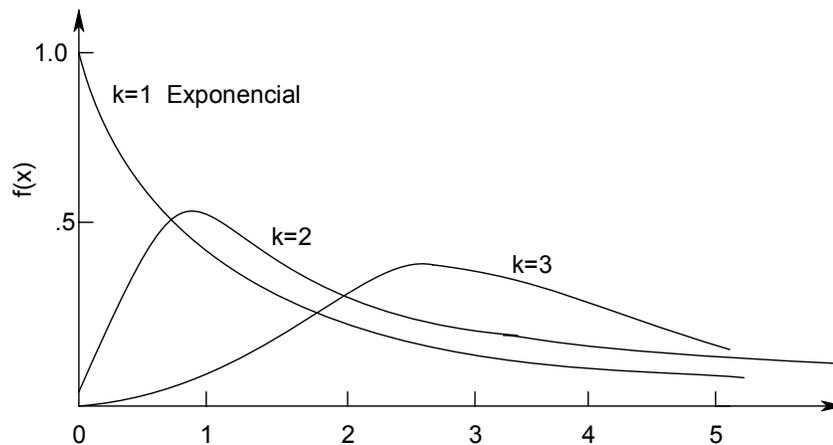
Figura 2: A Distribuição Gamma

2.2. Teoria das Filas de Espera

2.2.1. Definições

Um sistema de fila de espera pode ser descrito como a chegada de clientes a um sistema para serem atendidos, que esperam pela sua vez quando não existe servidores disponíveis, e que, depois de serem atendidos, deixam o sistema.

Na maioria dos casos, seis características básicas descrevem adequadamente um sistema de fila de espera (Gross & Harris (1998)):

1. o processo de chegada dos clientes;

2. o processo de atendimento dos clientes;

3. a disciplina de fila de espera;
4. a capacidade do sistema;
5. o número de servidores;
6. o número de fases do serviço.

- ***O processo de chegado dos clientes***

O processo de chegada é geralmente um processo estocástico, sendo necessário conhecer a distribuição de probalidade que descreve os tempos entre chegadas.

- ***O processo de atendimento dos clientes***

O intervalo de tempo para atender um cliente é geralmente descrito por uma distribuição de probabilidade. Geralmente, os tempos de serviço são considerados independentes do processo de chegada e do servidor que executa o serviço, e são identicamente distribuídos.

- ***A disciplina de fila de espera***

A disciplina de fila de espera refere-se à forma como os clientes são seleccionados para serem atendidos quando se forma a fila de espera. A disciplina mais comum é: atender em primeiro lugar quem chegou primeiro (FIFO –"First In, first Out"). "Atender em primeiro lugar o último a chegar" (LIFO -"Last In, first Out") é também uma política utilizada frequentemente em sistemas de inventários (quando as unidades armazenadas não se tornam obsoletas) por ser mais fácil alcançar a última unidade.

- ***A capacidade do sistema***

Em alguns sistemas existe uma limitação física no local de espera. Quando a fila atinge um determinado tamanho, não é permitida a entrada de mais clientes até que haja espaço disponível.

- ***O número de servidores***

O número de servidores refere-se ao número de clientes que podem ser atendidos em simultâneo.

- ***O número de fases do serviço***

Um sistema de fila de espera pode ter várias fases de serviço. Cada cliente tem de passar pelas várias fases.

2.2.2. Notação

Para descrever o processo de fila de espera utiliza-se uma notação que fornece indicações sobre as características básicas do sistema.

A notação consiste numa série de símbolos: A/B/C/Y/Z

A- designa a distribuição do tempo entre chegadas

B- designa o processo de atendimento dos clientes

C- designa o número de servidores em paralelo

Y- designa a restrição relativa à capacidade do sistema

Z- designa a disciplina de atendimento da fila de espera

Característica	Símbolo	Significado
	M	Exponencial Negativa
Distribuição do tempo entre chegada (A)	D	Determinística
Distribuição do tempo de serviço (B)	E_k	Erlang tipo k (k=1,2,…)
	G	Geral
Número de servidores em paralelo (C)	1,2,….,∞	
Restrição na capacidade do sistema (Y)	1,2,….,∞	
Disciplina da fila de espera (Z)	FIFO	*First In, First Out*
	LIFO	*Last In, Last Out*
	RSS	Selecção aleatória
	GD	Disciplina geral

Tabela 1: Notação para as filas de espera

2.2.3. Medidas de Desempenho

Num sistema de fila de espera, há geralmente dois tipos de problemas que podem ser resolvidos: determinar algumas medidas de eficiência de um determinado processo ou, por outro lado, dimensionar um sistema tendo em conta um determinado critério de optimização.

No primeiro caso, as medidas de desempenho ou de eficiência com interesse são geralmente de três tipos:

- o tempo que um cliente tem de esperar na fila ou o tempo total que o cliente passa no sistema;
- o número de clientes na fila ou no sistema;
- o tempo de inactividade dos servidores (ou a utilização dos servidores).

Para dimensionar um sistema de fila de espera é geralmente necessário balancear o tempo de espera de um cliente com o tempo de inactividade dos servidores com base numa determinada estrutura de custos. O custo de inactividade pode ser utilizado para determinar o número de servidores no sistema e a suas taxas de serviço. Em certos casos, é também útil dimensionar o espaço necessário para a fila de espera.

Em ambos os casos, na resolução de modelos de fila de espera determina-se a distribuição de probabilidade do número total de clientes no sistema no instante t N(t), que é a soma do número de clientes na fila de espera $N_q(t)$ com o número de clientes a serem atendidos, $N_s(t)$. Seja $p_n(t)= P(N(t)= n)$, e $p_n= P(N=n)$ no estado estacionário. Considerando C servidores no estado estacionário, podem ser deduzidas as duas medidas de maior interesse:

- o número médio de clientes no sistema,

$$L_s= E[N]= \sum_{n=0}^{\infty} np_n \; ; \tag{2.10}$$

- e o número esperado de clientes na fila,

$$L_q= E[N]= \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-C)p_n \tag{2.11}$$

2.2.4. A Formula de Little

Uma relação que tem muita utilidade na teoria das filas de espera foi desenvolvida por John D. C. Little. A formula de Little relaciona o comprimento da fila de espera com o tempo de espera do cliente.

Designando por λ a taxa de chegada dos clientes ao sistema e por W_q o tempo médio de espera na fila de espera, o comprimento médio da fila de espera L_q pode ser obtido pela formula de Little:

$$L_q = \lambda W_q \tag{2.12}$$

Da mesma forma e tendo em conta que, o tempo médio de permanência no sistema (W) é dado por $W= W_q+1/\mu$, em que μ é a taxa média de serviço, o número médio de clientes no sistema é dado por:

$$L_s = \lambda W \tag{2.13}$$

2.3. Fiabilidade

2.3.1. Introdução

A fiabilidade é definida como a probabilidade de um item desempenhar adequadamente as funções para as quais é requerido, durante um período especificado de tempo e nas condições normais de funcionamento.

A definição da fiabilidade tem dois aspectos importantes. Por um lado, o tempo durante o qual o equipamento é solicitado e, por outro lado, as condições operacionais e ambientais de funcionamento. Os equipamentos são projectados tendo em conta determinadas condições ambientais e de funcionamento. A alteração dessas condições pode provocar a falha prematura dos equipamentos, sendo que o comportamento do equipamento deixa de ser previsível e a previsão da fiabilidade deixa de ser válida.

A fiabilidade exprime-se matematicamente pela função fiabilidade cuja expressão é dada pela equação 2.14. Esta função indica a probabilidade de um equipamento não avariar antes de t. t representa o tempo de missão e τ, o tempo da (primeira) falha ou avaria. A definição pressupõe que o equipamento está em condições de funcionamento no instante t = 0, ou seja, R(t = 0) = 1.

$$R(t) = P(\tau \geq t) \quad \wedge \quad t > 0 \tag{2.14}$$

A expressão da função fiabilidade pode ser obtida pelo integral da função densidade de probabilidade de falha de um item.

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t).dt \tag{2.15}$$

O tempo de vida ou de operação de um determinado equipamento pode ser medido e observado em mais do que uma escala de tempo. A escala de tempo mais adequada na análise da fiabilidade depende do

sistema observado e dos factores que levam à sua degradação. No caso dos automóveis, o tempo de calendário e a quilometragem são duas escalas possíveis quando se analisa a fiabilidade dos seus subsistemas e componentes. Por exemplo, a idade de uma carroçaria de um automóvel tem de ser medida pelo tempo de calendário, e não pela quilometragem, porque o principal factor de degradação é a corrosão que se manifesta com o tempo. Por outro lado, a idade do sistema de travagem é medido em quilómetros, uma vez que o factor que leva a sua deterioração é o desgaste dos discos de travão, que é função dos quilómetros percorridos. De facto, neste caso, a escala mais adequada é o número de vezes que o travão é accionado. No entanto, uma vez que essa informação não está disponível, a escala que melhor se aproxima, porque está directamente relacionada com a primeira, é a quilometragem.

Antes de indicar como se avalia a fiabilidade é importante diferenciar os equipamentos não reparáveis dos equipamentos reparáveis. Os equipamentos não reparáveis, que designaremos daqui em diante por componentes, têm um período de vida que termina quando ocorre a primeira e única falha. Os equipamentos reparáveis, que designaremos por sistemas, são reparados quando ocorrem falhas e o fim da vida surge quando o custo de manutenção ultrapassa o custo de substituição (conceito designado de vida útil) ou quando o equipamento se torna obsoleto, sendo a alternativa de substituição mais económica (conceito designado de vida económica).

A diferença entre componente e sistema é importante do ponto de vista da fiabilidade na medida em que a análise da fiabilidade de um item baseia-se em indicadores distintos e modelos que, sendo iguais, devem ser interpretados de forma distinta.

Nas secções seguintes são abordadas separadamente os indicadores e modelos de fiabilidade para componentes e sistemas.

2.3.2. Fiabilidade de Componentes

A fiabilidade de um componente pode ser descrita pela função densidade de probabilidade do tempo de vida do componente e respectiva função de fiabilidade, pelo tempo médio para falhar MTTF ou pela função de risco.

O tempo médio para falhar é o valor esperado do tempo de falha de um componente:

$$MTTF = \int_{t=0}^{\infty} t.f(t).dt\,, \tag{2.16}$$

em que f(t) é a função densidade de probabilidade do tempo de vida do componente.

A função de risco h(t) é a probabilidade condicional de falha no intervalo de t a (t+dt), dado que o componente não falhou até t,

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)}\,, \tag{2.17}$$

em que F(t) é a distribuição de probabilidade do tempo de vida do componente.

As distribuições de probabilidade utilizadas com frequência para modelar a distribuição de probabilidade do tempo de vida de um componente são geralmente a distribuição Exponencial Negativa, a distribuição Normal e a distribuição de Weibull.

A distribuição Exponencial Negativa é a distribuição mais adequada para descrever o comportamento de componentes electrónicos cujas falhas são originadas por causas de origem aleatória que resultam da aplicação de carga em excesso em relação à capacidade, a uma taxa média constante. A função de risco correspondente é constante mostrando que a probabilidade de falha num determinado instante é independente da probabilidade de falha no instante ou intervalo de

tempo anterior. Diz-se que a distribuição Exponencial Negativa não tem memória, não sendo adequada para representar a fiabilidade de componentes cujas probabilidades de falha dependem do estado anterior do componente, tal como acontece com a maioria dos componentes mecânicos.

Os componentes mecânicos estão sujeitos a vários processos de degradação como a fadiga, o desgaste e a corrosão. Estes processos provocam uma deslocação da curva da capacidade do componente para a esquerda, aumentando a sua probabilidade de falha. As falhas tornam-se mais prováveis de ocorrerem com o decorrer do tempo. As distribuições Normal e de Weibull permitem modelar as funções de risco crescentes de tais componentes (no caso da distribuição de Weibull considera-se o parâmetro de forma $\beta>1$).

2.3.3. Fiabilidade de Sistemas

Um sistema é, de uma forma geral, constituído por um conjunto de componentes cujos tempos de vida podem ser modelados por distribuições de probabilidade. A avaliação da fiabilidade de um sistema pode ser feita através da taxa de avarias, do tempo médio entre falhas MTBF, da disponibilidade ou através de modelos de fiabilidade, que são abordados na secção 2.3.4.

- ***A taxa de avarias***

Se N(t) for o número de avarias ocorridas até ao instante t, a taxa de avarias ou taxa de ocorrência de falhas de um sistema (ROCOF - *Rate of Occurrence of Failures* -) designada por $\lambda(t)$ é definida como sendo a derivada em ordem ao tempo do número esperado de falhas até ao instante t:

$$\lambda(t) = \frac{d\,E[N(t)]}{dt} \qquad (2.18)$$

O gráfico que representa a variação da taxa de avarias ao longo do tempo é designado por Curva da Banheira (figura 3).
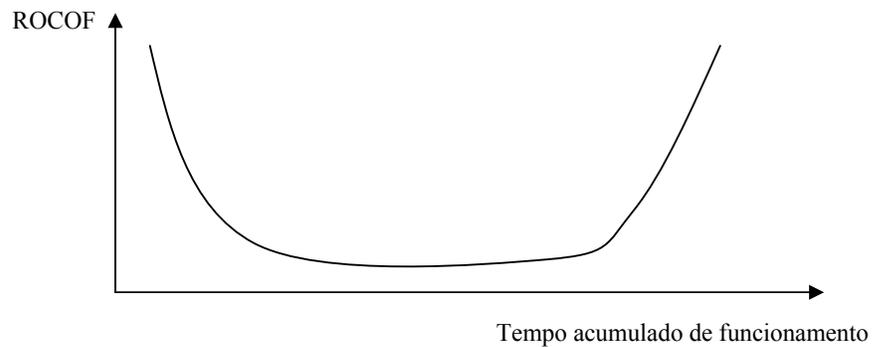
Figura 3: Curva da Banheira para sistemas

A Curva da Banheira representa o comportamento de um sistema perante a falha. Podem-se identificar três fases que se designam por fase infantil, fase de vida útil e fase de desgaste.

A fase infantil ou fase de avarias precoces é um período de tempo curto em que a taxa de avarias é elevada mas decrescente. Nesta fase, os componentes "fracos" ou fora das tolerâncias avariam e são substituídos por componentes mais "fortes". Geralmente quando os equipamentos chegam ao cliente, esta fase foi ultrapassada através de testes que são executados para testar a capacidade limite e detectar os componentes cujas especificações não correspondem às exigências do equipamento.

Na fase de vida útil, a taxa de avarias do sistema mantém-se constante. Se o equipamento estiver sujeito às condições para as quais foi projectado e concebido, as falhas ocorrem devido a causas aleatórias.

Após um longo período de funcionamento, o equipamento entre na fase de desgaste em que a taxa de avarias aumenta exponencialmente

devido à deterioração de alguns componentes, originada por efeitos cumulativos tais como a fadiga, a corrosão ou o desgaste.

Cox & Lewis (1966) relaciona a curva da banheira e as suas três fases com a interacção da carga e da capacidade de um equipamento. A figura 4 mostra uma situação em que existe interacção das distribuições de carga e capacidade. Numa população de itens com a distribuição de capacidade ($f_c(c)$), um item na cauda do lado esquerdo da distribuição da capacidade que fique sujeito a uma carga na cauda do lado direito da distribuição de carga irá falhar.
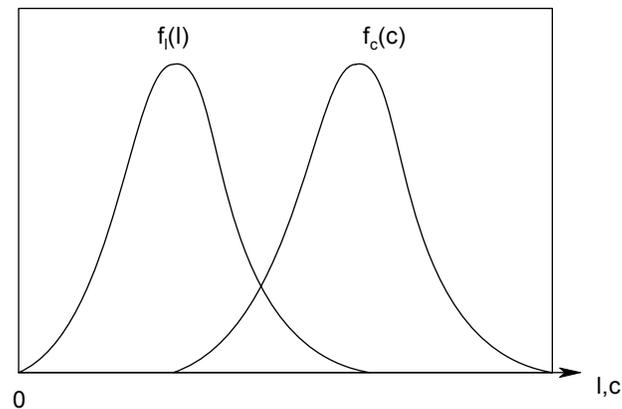
Figura 4: Interacção da Carga e Capacidade

Segundo Cox & Lewis (1966) a fase infantil, a fase de vida útil e a fase de desgaste estão associadas, respectivamente:

- à variação da capacidade (a capacidade do equipamento aumenta porque são retirados os componentes defeituosos);

- à variação da carga (a capacidade não varia, a variação aleatória da carga provoca falhas aleatórias);

- e à deterioração da capacidade (devido a fenómenos tais como a corrosão, fadiga etc.).

O tempo médio entre avarias

O tempo médio entre avarias, MTBF- *Mean Time Between Failures*, é uma medida da fiabilidade de sistemas. O MTBF mede o tempo médio durante o qual o equipamento permanece em funcionamento até ocorrer uma avaria. O valor instantâneo ou pontual do MTBF é obtido pelo inverso da taxa de avarias.

Na avaliação da fiabilidade de um sistema, há duas variáveis temporais relevantes para a identificação da avaria: o tempo entre duas avarias consecutivas (x_i) e o tempo acumulado de funcionamento desde o início do teste ou do arranque do sistema (T_i) (ver figura 5). O tempo acumulado de funcionamento tem especial interesse nos testes de tendência, que procuram determinar se as falhas ocorrem ou não de uma forma aleatória.
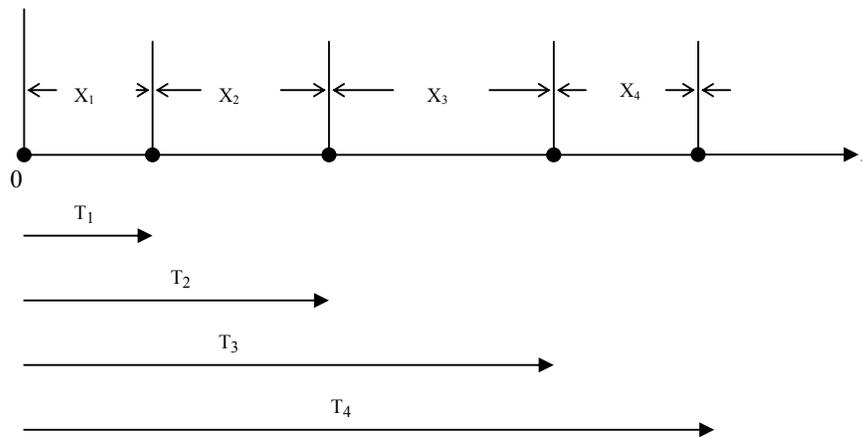
Figura 5: Tempo entre avarias e tempo acumulado de funcionamento

A disponibilidade

Os sistemas ou equipamentos reparáveis têm períodos em que estão disponíveis para funcionar e períodos em que, por terem avariado e estarem em reparação ou por se encontrarem em manutenção, não estão disponíveis. Por esse facto, a disponibilidade é uma medida que

é particularmente relevante na avaliação do desempenho de um equipamento. A disponibilidade é função da maior ou menor frequência de avarias mas também, da maior ou menor rapidez da realização das acções de manutenção, que por sua vez é dependente dos meios disponíveis e da manutibilidade do equipamento. A manutibilidade é um parâmetro de projecto que traduz a capacidade de um equipamento ser mantido em boas condições.

A definição matemática mais geral da disponibilidade é a seguinte:

$$D = \frac{T_{up}}{T_{up} + T_{down}} \qquad (2.19)$$

T_{up} representa o período de tempo durante o qual o sistema se encontra num estado operacional (ver figura 6), podendo estar activo ou não. T_{down} representa um período de tempo em que o sistema não está operacional e engloba o tempo de reparação activa (que inclui os tempos de diagnóstico e localização da avaria, de preparação da reparação, de reparação e de verificação e ensaio) e o tempo dedicado a acções de manutenção preventiva, o tempo logístico (tempo de espera por componentes e materiais para realização da acção de manutenção) e o tempo administrativo (tempo de preenchimento de impressos e de afectação do trabalho de manutenção).
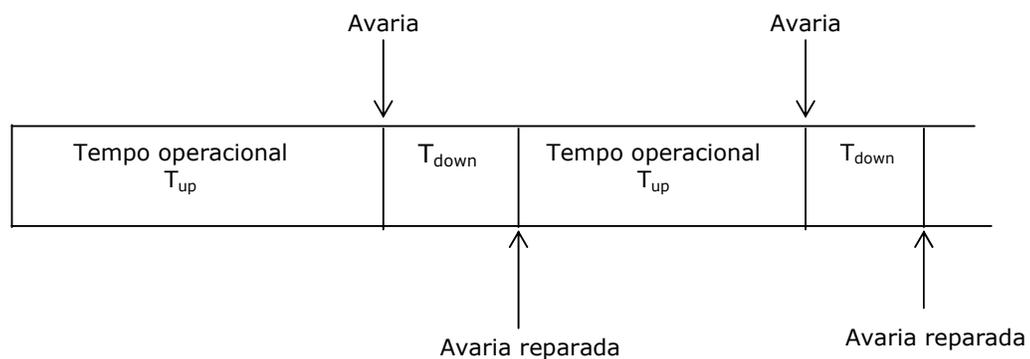
Figura 6: Períodos T_{up} e T_{down}

O aumento da disponibilidade de um equipamento pode ser conseguido pela redução do número de paragens, alcançadas através da manutenção preventiva; e/ou pela redução do tempo despendido para resolver a avaria, optimizando a manutenção correctiva.

Quando um sistema se encontra no estado estacionário, o valor da disponibilidade pode ser obtido através dos valores do MTBF e do MTTR (equação 2.20), desde que haja coerência na escala de tempo. O MTTR - *Mean Time To Repair*- representa o tempo médio de reparação.

$$D = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} \quad (2.20)$$

2.3.4. Modelação da Fiabilidade de Sistemas

Segundo Ascher & Feingold (1984) e O´Connor (1995), um sistema reparável consiste num conjunto de posições (*sockets*) e seus respectivos componentes ou sub-sistemas que, depois de falhar na realização de pelo menos uma das suas funções, pode ser reposto em funcionamento através de uma reparação. Para sistemas complexos, uma aproximação de primeira ordem na modelação da fiabilidade de sistemas consiste em considerar que os componentes estão em série. Quando um componente avaria, ele é substituído por outro idêntico para repor o sistema em funcionamento. Dessa forma, a fiabilidade de sistemas pode ser descrita por um processo resultante da sobreposição dos processos gerados em cada posição. A questão é de saber qual é o modelo que melhor descreve este processo global.

Numerosos autores utilizam o processo Homogéneo de Poisson (taxa de avarias constante) para modelarem a fiabilidade de sistemas. Outros porém, utilizam modelos que descrevem uma taxa de avarias variável com o tempo.

- ***Taxa de avarias constante***

A vasta utilização do processo Homogéneo de Poisson para modelar a fiabilidade de sistemas deve-se à Curva da Banheira, que é um modelo largamente aceite na literatura para representar a variação da taxa de avarias com o tempo. Para a maioria dos sistemas, a parte central da Curva da Banheira, em que a taxa de avarias é constante, estende-se por um período de tempo longo comparativamente com o tempo de vida total do equipamento.

Drenick (1960) também apoia a utilização do processo Homogéneo de Poisson através do seu teorema, segundo o qual a taxa de avarias de sistemas complexos tende para um valor constante, após algum tempo de funcionamento, devido a repetidas substituições, que abrangem a maioria dos componentes críticos dos sistemas.

Segundo Cox & Lewis (1966), a aproximação a uma taxa de avarias constante é frequentemente adequada mesmo que um sistema ou alguns dos seus componentes exibem algumas falhas prematuras ou efeitos de envelhecimento. As falhas prematuras podem ser limitadas pelo controlo da qualidade na produção e na instalação do equipamento ou por um período de uso (designado por *burn in*) realizado antes do início de operação do equipamento. Da mesma forma, em muitos sistemas, os efeitos de envelhecimento podem ser fortemente limitados através de acções de manutenção preventiva adequadas, substituindo periodicamente os componentes nos quais o efeito do desgaste se faz sentir. Xie, Kong, et al. (2000) indicam que, mesmo que o sistema original tenha taxa de avarias crescente, o processo Homogéneo de Poisson é apropriado se o sistema for sujeito a manutenções ou substituições periódicas. As manutenções ou substituições periódicas tendem a reduzir ou até eliminar a possibilidade dos sistemas entrarem na fase de desgaste.

Segundo O´Connor (1995), se os processos gerados em cada posição de um sistema são processos Homogéneos de Poissson, o processo

global formado pela sobreposição dos processos individuais é também um processo Homogéneo de Poisson. Se os processos são renováveis mas não são Poissonianos, o processo global tenderá para um processo Homogéneo de Poisson.

Cox & Lewis (1966) considera que, mesmo que a taxa de avarias de um sistema varie com o tempo, pode-se utilizar uma taxa de avarias constante que envolva toda a curva; essa taxa será moderadamente pessimista.

- ***Taxa de avarias variável***

Segundo Lim & Lie (2000), os modelos para análise da fiabilidade de sistemas podem ser classificados em três categorias:

- modelos com reparação perfeita, em que a taxa de avarias de um sistema depois de sujeito a uma reparação é igual à taxa de um sistema novo (estado frequentemente designado na literatura anglo-saxónica por *as good as new*);
- modelos com reparação mínima, em que a taxa de avarias não se altera devido à reparação (estado frequentemente designado na literatura anglo-saxónica por *as bad as old*);
- modelos com reparação imperfeita.

Para modelos com reparação perfeita, a ocorrência de falhas é descrita por processos renováveis. Este tipo de reparação supõe implicitamente (a maioria dos autores não são claros a esse respeito) que a taxa de avarias tem vido a aumentar desde o início de vida do equipamento e que, após a reparação, ela assume o valor mínimo alguma vez experimentado. Esta suposição constitui uma contradição óbvia ao conceito da Curva da Banheira, que é o modelo globalmente aceite para representar a evolução da taxa de avarias ao longo do tempo. Segundo a curva da banheira, um equipamento novo tem uma taxa de avarias que diminui até atingir um valor que será mantido ao longo da

vida útil do equipamento. Quando os autores se referem ao conceito *as good as new*, poderão também supor que a taxa de avarias após reparação toma o valor assumido no início da vida útil. Mas neste caso, se no decorrer da vida útil o equipamento avariar, a taxa de avarias será a mesma após qualquer tipo de reparação seja ela perfeita, mínima ou imperfeita. Poderá haver, no entanto, uma alteração no tempo esperado de vida do equipamento.

Segundo Lim & Lie, a reparação perfeita inclui a substituição do próprio equipamento por um novo. De facto, para além desta última situação, parece difícil alcançar a taxa de avarias de um equipamento novo (supondo a taxa de avarias crescente) através de uma única acção de manutenção.

Nos modelos com reparação mínima, a ocorrência de falhas segue um processo de Poisson não Homogéneo. Diz-se que o processo de ocorrência de falhas não é estacionário porque a taxa de avarias é variável com o tempo. Os tempos entre avarias não são nem independentes, nem identicamente distribuídos. O modelo de Duane (Duane (1964)), o modelo de Crow (Crow (1974)) e o Modelo de Cox & Lewis (Cox & Lewis (1966)) são exemplos de modelos de fiabilidade para processo não homogéneos de Poisson.

<u>O modelo de Duane</u>

O modelo de Duane ou "*Power Law Model*" é um modelo gráfico que teve a sua origem num estudo levado a cabo por Duane. Duane analisou os dados disponíveis de sistemas desenvolvidos pela General Electric de forma a determinar se ocorriam algumas mudanças sistemáticas na melhoria da fiabilidade no decorrer do desenvolvimento de sistemas. A sua análise revelou que, para esses sistemas, a curva do MTBF acumulado versus tempo acumulado de funcionamento aproximava-se de uma linha recta na escala ln-ln. Crow (1974) mostrou que o modelo empírico construído por Duane era essencialmente um processo não homogéneos de Poisson.

Recentemente Donovan & Murphy (1999) verificaram que, no modelo de Duane, as primeiras falhas têm uma elevada influência na determinação do declive (β), o que dificulta a observação de melhorias, e propuseram um modelo alternativo ao modelo de Duane. No modelo desenvolvido, somente o eixo do tempo acumulado é transformado utilizando a raiz quadrada, fazendo com que as últimas falhas tenham maior influência na determinação do declive. Donovan & Murphy (2002) comparam o seu modelo com o modelo de Duane através da simulação em computador. A simulação mostrou que o novo modelo proporciona um melhor ajuste aos dados quando o declive do modelo de Duane é inferior a 0,5.

O modelo de Crow

O modelo de Crow tem uma taxa de avarias que é dada pela expressão:

$$\lambda(t) = \gamma.\beta.t^{\beta-1}, \quad (2.21)$$

onde $\gamma>0$, $\beta>0$ e t é a idade do sistema.

Quando $\beta>1$, a taxa de avarias é crescente e representa um sistema que se deteriora com o tempo. Quando $\beta<1$, a taxa de avarias é decrescente e representa um sistema cuja fiabilidade melhora com o tempo. Para $\beta=1$, o modelo converte-se num processo Homogéneo de Poisson, com taxa de avarias constante.

Crow (1974) definiu os estimadores de máxima verosimilhança dos parâmetros γ e β e propôs métodos para realizar testes de hipóteses e construir intervalos de confiança para os parâmetros.

O modelo de Cox & Lewis

O modelo de Cox & Lewis ou "*Log-linear process*" tem uma taxa de avarias que é dada pela expressão:

$$\lambda(t) = e^{\alpha_0 + \alpha_1 t} \quad (2.22)$$

Um sistema cuja taxa de avarias pode ser modelada por este modelo tem fiabilidade crescente se α_1<0 e fiabilidade decrescente se α_1>0. Se α_1=0, as falhas ocorrem segundo um processo Homogéneo de Poisson.

O modelo de Crow é mais utilizado do que o modelo de Cox & Lewis por ser mais fácil de manipular matematicamente.

Os modelos com reparação imperfeita são também classificados de modelos de melhoria. Nestes modelos considera-se que, após uma reparação, a taxa de avarias não é igual à de um equipamento novo, nem é idêntica a taxa de avarias do sistema antes da reparação. A taxa de avarias é melhorada e tem um valor compreendido entre estes dois extremos.

O modelo de reparação imperfeita mais conhecido é o modelo de Brown & Proschan (1983). Este modelo considera que, quando ocorre uma avaria, o sistema sofre uma reparação perfeita com probabilidade P ou uma reparação mínima com probabilidade 1-P e que o modo de reparação está sujeito a um processo de Markov.

Outros modelos de melhoria pressupõem que, depois da reparação (Kijima (1989)) ou de uma acção de manutenção preventiva (Ben-Daya & Alghamdi (2000)), a idade do sistema diminui. Kijima (1989) propõe que o estado de um equipamento imediatamente após reparação é descrito pela sua idade virtual, idade esta que é inferior à idade real, sendo a taxa de avarias depende dessa mesma idade. No modelo de manutenção preventiva de Ben-Daya & Alghamdi (2000), as manutenções imperfeitas originam uma redução na idade do equipamento que é proporcional ao custo da manutenção preventiva (quanto maior é o custo maior é a redução).

Sarker & Yu (1995) utilizam um factor de melhoria para descrever quantitativamente o grau de manutenção preventiva praticado no sistema. A taxa de avarias sofre uma redução que é determinada pelo factor de melhoria.

➢ *Modelação da fiabilidade de sistemas considerando os tempos improdutivos*

Para além dos modelos anteriores, encontram-se na literatura publicações que procuram determinar a fiabilidade de sistemas considerando a duração das reparações ou outros tempos de inactividade dos sistemas. Para além da duração das reparações, alguns modelos consideram ainda outras particularidades; por exemplo no modelo de Gupta & Mumtaz (1996), os tempos de falha e reparação estão correlacionados.

Zhang & Horigome (2001) procuram encontrar a disponibilidade e fiabilidade de sistemas sujeitos a falhas comuns dos seus componentes e com taxas de avarias e reparação dependentes do tempo. Os autores constataram que existem muitos estudos que contemplam as falhas comuns de componentes num sistema, no entanto, todos consideram as taxas de avarias e reparação constantes (não dependentes do tempo). Outros estudos tratam o problema de sistemas com taxa de avarias e reparação variáveis com o tempo, mas omitem a existência de falhas comuns. O artigo descreve os estados possíveis de um sistema sujeito a falhas e reparações e apresenta a matriz de transição de estados respectiva. Para o caso das taxas de avarias e reparações constantes, os autores aplicam as transformadas de Laplace para encontrar as probabilidades de cada estado do sistema e, posteriormente, deduzem as expressões analíticas da fiabilidade e disponibilidade. Para o caso das taxas variáveis, o artigo apresenta uma forma de obter a matriz de transição de estados que permite calcular a fiabilidade e disponibilidade dos sistemas com taxas variáveis com o tempo.

Baseado nas propriedades de Markov, Choi & Lee (2000) propõem dois algoritmos para encontrar as probabilidades de estado de um sistema produtivo, de forma a posteriormente determinar a seu desempenho. O sistema em análise é formado por várias estações de trabalho em serie, cada uma contendo uma ou mais máquinas sujeitas a avarias,

que funcionam em paralelo. Cada estado do sistema indica o número de peças em cada máquina, se as máquinas estão funcionais ou em reparação e se existem peças bloqueadas. Uma peça está bloqueada se o seu processamento estiver concluído e não puder passar para a máquina (ou estação) seguinte por esta se encontrar ocupada. Para sistemas com diagramas de transição de estado simétricos, pode-se facilmente derivar equações gerais. Para sistemas com diagramas de transição de estados não simétricos, como é o caso do sistema analisado por Choi & Lee (2000), a determinação das probabilidades de estado é uma tarefa mais complexa. Os algoritmos propostos permitem a formulação de equações globalmente balanceadas para diferentes estados de sistemas com diagramas de transição não simétricos. Enquanto que o primeiro algoritmo é aplicável apenas a sistemas com uma máquina por estação e com *buffers* de uma unidade, o segundo permite a existência de mais do que uma máquina por estágio e de *buffers* com diferentes tamanhos.

O artigo de Gupta & Mumtaz (1996) trata da modelação de sistemas com unidades de reserva (estado inicial: uma unidade activa e uma unidade de reserva) cujos tempos de falha e reparação estão correlacionados. Os autores consideram ainda que, se a unidade em falha não for reparada dentro de um período de tempo especificado (quando o custo de reparação se torna superior ao custo de substituição), é feita uma requisição para substituir a unidade em reparação. O sistema falha se, durante a operação da unidade em falha, a outra também falha. Neste caso a reparação em curso é interrompida para reparar a unidade que falhou por último.

Utilizando a técnica "*Regenerative Point Technique*", as seguintes medidas de eficiência são obtidas:

1) tempo médio para a falha do sistema;
2) disponibilidade do sistema no estado estacionário;
3) ocupação esperada do operário de manutenção no intervalo (0,t] e no estado estacionário;

4) número esperado de substituições da unidade em falha no intervalo (0,t] e no estado estacionário;
5) lucro esperado incorrido no intervalo (0,t] e no estado estacionário.

Os autores concluem que o desempenho do sistema melhora com uma maior correlação entre os tempos de falha e de reparação.

2.3.5. Análise dos Dados de Falha de Sistemas

Os dados de falhas dos sistemas podem ser representados pelos tempos acumulados até à falha T_i (ou tempos ordenados de falhas) ou, pelos tempos entre falhas x_i. Antes de optar por um modelo que descreve o tempo entre avarias (processo de Poisson homogéneo, processo renovável ou processo de Poisson não homogéneo), deve-se analisar a possibilidade da existência de tendência na ocorrência de falhas. Para isso, utilizam-se os tempos ordenados de falha e aplica-se um teste de tendência tal como o teste de Laplace. Ascher & Hansen (1998), Massa & Leitão (1997), O´Connor (1995) e Ascher & Feingold (1984) apresentam a metodologia de análise da fiabilidade de sistemas reparáveis.

Se o teste de Laplace assinalar a existência de tendência crescente ou decrescente nos tempos ordenados de falha, pode concluir-se que o processo de falha não é estacionário e os dados, não sendo identicamente distribuídos, não podem ser ajustados a nenhuma distribuição de probabilidade. Um modelo não estacionário (*Power Law Process*, *IBM Process* ou *Cox & Lewis Model* ou *Proportional Hazards Modelling)* deverá ser ajustado. A figura 7 que se apresenta a seguir foi extraída do artigo de Ascher & Hansen (1998) e ilustra o procedimento proposto para analisar e modelar os tempos de falha de sistemas.
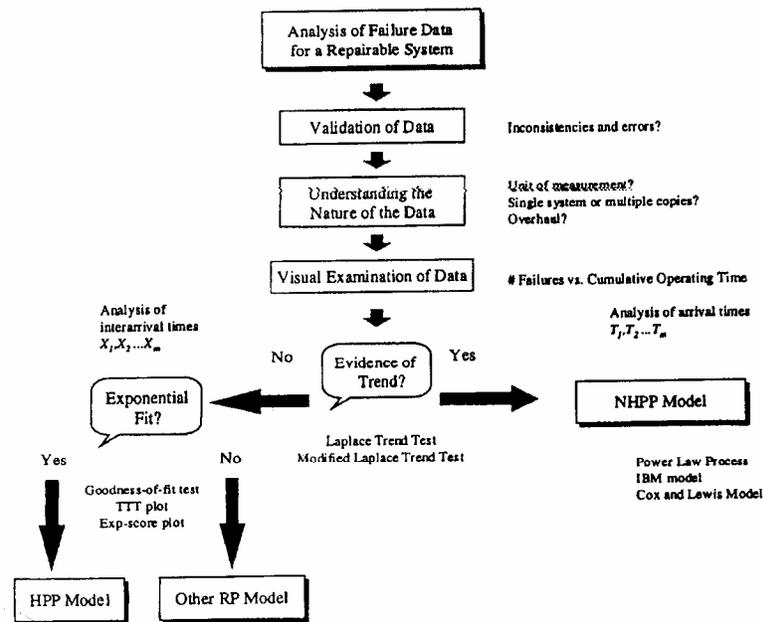
Figura 7: Análise de dados de falha

Quando não existe tendência, deve-se prosseguir o estudo com a análise dos tempos entre falhas. Através de um teste de qualidade de ajuste (*Total time on test plot*, *Pearson Chi-square test*), será verificado se os tempos entre falhas seguem uma distribuição Exponencial Negativa para analisar a possibilidade da modelação do sistema por um processo Homogéneo de Poisson. Se os tempos entre falhas não seguem uma distribuição Exponencial Negativa, o processo deverá ser modelado por um processo renovável mais geral, baseado por exemplo na distribuição de Weibull.

Bohoris (1996-b) e Bohoris & Leitão (1991) consideram uma situação prática mais complexa em que vários sistemas reparáveis idênticos funcionam em paralelo. Os dados provenientes destes sistemas são tratados em conjunto para aumentar o tamanho da amostra e, dessa forma, aumentar a eficiência da técnica estatística utilizada e diminuir o tempo de estudo. Para detectar a presença de uma tendência, Bohoris (1996-b) apresenta duas técnicas utilizadas anteriormente para análise de dados de falha proveniente de um único equipamento

(Bohoris (1996-a)). A primeira consiste em determinar a curva da taxa de avarias (número acumulado de falhas versus tempo acumulado de funcionamento) e a segunda consiste na realização do teste de tendência de Laplace.

2.3.6. Função de Risco e Taxa de Avarias

A designação – taxa de avarias - é frequentemente utilizada na literatura para designar a função de risco, o que geralmente torna confusa a noção de componente e sistema.

A figura 8 mostra como se relacionam a taxa de avarias (ou número de avarias por unidade de tempo) de um sistema com as funções de risco dos componentes que o constituem. Quanto maior for o valor tomado pelo função de risco de um componente maior será a probabilidade de ele avariar, acarretando também a falha do sistema (considera-se como aproximação que os componentes estão em série). Quando um componente é substituído preventivamente ou como resultado de uma avaria, o valor da função de risco do novo componente após a substituição pode ser inferior, igual ou superior ao valor da função de risco antes da substituição, consoante o componente tenha função de risco decrescente, constante ou crescente.

A forma da função de risco dos componentes é determinante no planeamento de substituições preventivas. Se um componente tem uma função de risco decrescente (componente 2), qualquer substituição irá originar um aumento na probabilidade de falha do sistema. Se a função de risco é constante (componente 3 e n), a substituição não originará qualquer diferença na probabilidade de falha. Se um componente tem função de risco crescente (componentes 1, 3 e 4), a substituição programada para qualquer instante de tempo irá melhorar a fiabilidade do sistema. Assume-se, no entanto, que a acção de substituir um componente não introduz qualquer outro defeito e que a distribuição do tempo de falha está perfeitamente definida.

A relação entre a taxa de avarias e a função de risco é apresentada por Leitão (1998).
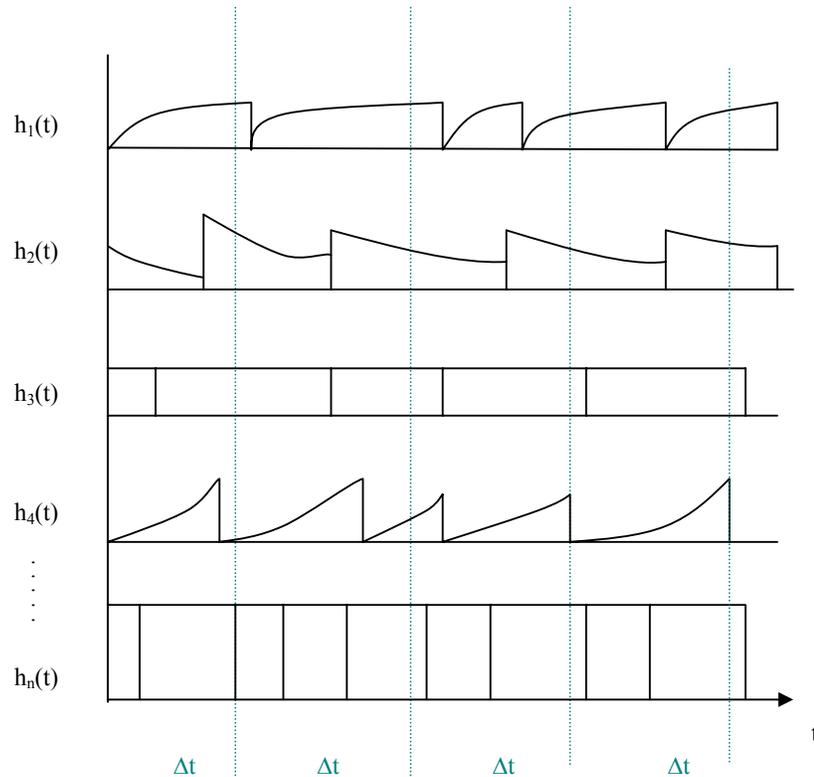
Figura 8: Função de risco e taxa de avarias

2.4. Manutenção

2.4.1. Tipos de Manutenção

Existem essencialmente dois tipos de manutenção: manutenção correctiva e manutenção preventiva.

A manutenção correctiva é levada a cabo para repor as capacidades funcionais de sistemas avariados ou com funcionamento deficiente. É uma abordagem reactiva porque a acção de manutenção inicia-se após a ocorrência da falha do equipamento. Com este tipo de política de manutenção, os custos podem ser elevados devido às seguintes razões (Gento (2004)):

- ao elevado custo de reparação do equipamento numa situação crítica;
- aos estragos secundários e aos problemas de segurança e saúde provocados pela falha; e
- às consequências associadas à perda de produção originadas pela indisponibilidade dos equipamentos.

Para minimizar os efeitos na produção criados pelas falhas inesperadas das maquinas, uma implantação fabril que use exclusivamente a manutenção correctiva deve ter capacidade para reagir imediatamente a todas as falhas. É necessário manter vastos inventários de unidades de reserva que incluem máquinas de reserva ou, pelo menos, todos as peças mais importantes para cada equipamento critico na implantação.

Por outro lado, a manutenção preventiva é uma abordagem desenvolvida para evitar as falhas inesperadas, que permite reduzir o tempo da intervenção e os custos de operação associados. É planeada para preservar e melhorar a fiabilidade dos equipamentos pela substituição de componentes sujeitos a desgaste antes que estes falhem. As actividades de manutenção preventiva incluem também a verificação dos equipamentos, mudanças de óleo, lubrificação etc.

Distinguem-se dois tipos de manutenção preventiva:

- manutenção preventiva sistemática: as revisões ou substituições de itens são efectuadas segundo um programa preestabelecido, segundo o tempo ou o número de unidades de utilização (ex.: quilómetros, ciclos, etc.); e
- manutenção preventiva condicionada: a manutenção é executada se um diagnóstico revelar um determinado grau de degradação.

Lin, Zuo, et al. (2001) dividem a manutenção preventiva sistemática em periódica e sequencial. As manutenções preventivas periódicas

definem que os sistemas são sujeitos a manutenções em intervalos inteiros múltiplos de um período fixo e são sujeitos a reparações mínimas quando ocorrem falhas entre as manutenções preventivas. As reparações mínimas restituem apenas as funções do sistema quando ele está avariado, mas não alteram a condição geral do sistema. Na manutenção preventiva sequencial, o sistema é sujeito a manutenções num sequência de intervalos que podem ter comprimentos diferentes. A manutenção preventiva sequencial é a manutenção preventiva mais adequada quando o sistema requer uma manutenção mais frequente à medida que a sua idade aumenta.

A manutenção condicionada envolve a monitorização regular das condições mecânicas actuais, eficiência de operação, e outros indicadores das condições operacionais dos equipamentos, e providencia os dados requeridos para assegurar o máximo intervalo de tempo entre reparações, minimizando o número e o custo de intervenções não planeadas originadas pelas avarias das máquinas. Em vez de programar as actividades de manutenção com base em estatísticas, a manutenção condicionada utiliza dados provenientes do equipamento para determinar o actual tempo médio até falhar e a perda de eficiência para cada máquina ou sistema. A operação de manutenção é realizada quando as condições se deterioram para além de um determinado nível crítico.

A optimização de uma política de manutenção requer o balanceamento dos três tipos de manutenção (manutenção correctiva, manutenção preventiva sistemática e manutenção preventiva condicionada) de forma a que sejam aplicados apenas quando e onde necessários, eliminando toda a manutenção excessiva.

O tipo de manutenção escolhida deve ter em consideração a distribuição do tempo de falha do componente; a aplicação de uma abordagem preventiva para um componente com padrão de falha exponencial pode revelar-se contraprodutiva.

O tipo de manutenção de um item ou sistema também depende da severidade das consequências provocadas pela sua avaria. Para os itens cujas consequências das falhas são pouco significativas é por vezes preferível deixá-los intactos e submetê-los a acções de manutenção correctiva quando a falha ocorre. Pelo contrário, para aqueles itens cujas falhas podem resultar em problemas económicos ou de segurança, a manutenção preventiva sistemática ou a manutenção preventiva condicionada deve ser aplicada de forma a evitar a ocorrência de falhas. Para ambas, manutenção sistemática e manutenção condicionada, é possível programar, em determinados ambientes, algumas das actividades de manutenção, de acordo com a conveniência do operador, quando o sistema não está a trabalhar. No entanto, à medida que os sistemas se tornam cada vez mais complicados, as intervenções de manutenção preventiva tornam-se também mais complexas e é necessário parar o equipamento para as realizar.

Alguns autores consideram a melhoria do equipamento como um tipo de manutenção. Através de alterações físicas do equipamento (ou alterações de projecto), é possível aumentar a fiabilidade, melhorar a manutibilidade e minimizar a necessidade de recursos de manutenção e de operações de rotina.

2.4.2. As Medidas de Desempenho

Campbell (1995) classifica as medidas comuns de desempenho da manutenção em 3 categorias, com base no seu foco:

- medidas de desempenho do equipamento: disponibilidade, fiabilidade, OEE (*Overall Equipment Effectiveness*).
- Medidas de desempenho relacionadas com os custos: custos de mão obra e custo de materiais.

– Medidas de desempenho do processo: relação entre o trabalho planeado e não planeado, conformidade com o que foi programado.

O objectivo de uso mais comum na optimização da manutenção consiste ou na maximização do lucro ou na minimização dos custos. Um índice que também é frequentemente adoptado na representação do desempenho de um sistema é a disponibilidade. A disponibilidade descreve o rácio entre o tempo em que um equipamento se encontra operacional e o tempo em que ele é solicitado, e é tão importante como o custo/lucro em muitas situações reais. Por essa razão, muitos autores consideraram ambos os critérios no desenvolvimento de abordagens para procurar optimizar a manutenção.

Tal como em outras áreas, a escolha da medida a optimizar depende de cada caso em específico. Certos modelos adoptam a segurança, a saúde e/ou o meio ambiente como medidas prioritárias, sendo a melhor solução aquela que proporciona o menor risco, tendo em conta, no entanto, que o impacto nos custos não deixe de ser aceitável.

2.4.3. Os Custos de Manutenção

De uma forma geral, os modelos que procuram optimizar a manutenção de um equipamento balanceiam os custos da adopção de acções preventivas de manutenção com os custos originados pela ocorrência de falhas, como indica a figura 9.
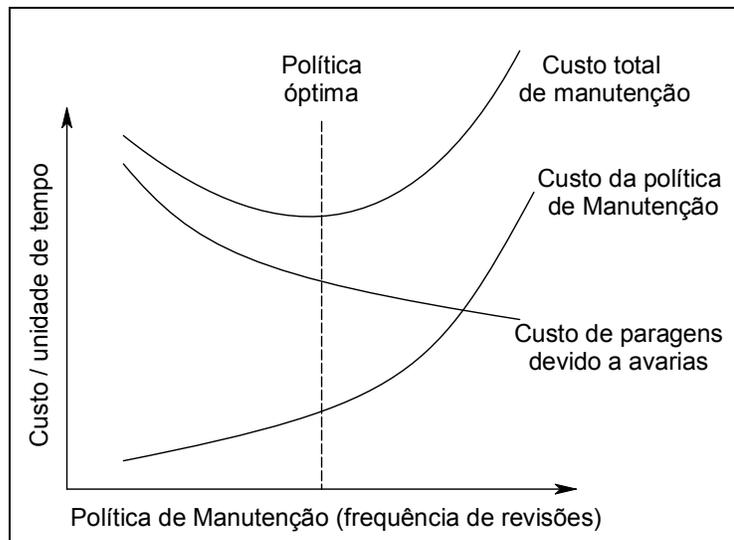
Figura 9: Balanceamento dos custos de manutenção

Os custos das acções preventivas incluem basicamente os custos de mão de obra de manutenção, o custo de materiais e, no caso de não ser possível realizar as acções preventivas fora do período de funcionamento do equipamento, os custos de paragem (ou perda de produção) e arranque, necessários para se executar essas acções.

Nos custos originados devido às avarias incluem-se, para além do custo de reparação (mão de obra e materiais) e do custo de arranque:

- os custos de perda de produção originados pela avaria do equipamento e pela falta de equipamentos de reserva para o substituir;

- o custo das matérias primas em curso no momento da avaria;

- o custo de perda de qualidade originado na iminência da avaria;

- os gastos induzidos tais como consequências associadas aos prazos não cumpridos ou degradação da imagem no mercado;

- o custo de mão de obra desocupada.

No caso da utilização de equipamentos de reserva, os custos de perda de produção diminuem, mas em contrapartida incorre-se num custo de

posse que depende do valor da aquisição dos mesmos, do espaço que ocupam e, eventualmente, da manutenção que requerem.

São ainda custos de manutenção os gastos gerais do serviço de manutenção que incluem: seguros, aluguer, iluminação, telefone, veículos de serviço, entre outros.

No custo de materiais, incluem-se o custo de aquisição e o custo de posse. A política de aprovisionamento desses materiais é definida em função das políticas de manutenção escolhidas sendo que, na realização de acções de manutenção preventiva, a necessidade de materiais é conhecida. No caso da manutenção correctiva, a necessidade de materiais é imprevisível obrigando a manter inventários para minimizar o tempo de paragem.

CAP 3. POLÍTICAS E MODELOS DE MANUTENÇÃO

Encontram-se na literatura vários modelos de manutenção preventiva; uns consideram a substituição preventiva do item, outros consideram, para além da substituição, a realização de revisões. Várias políticas de manutenção são estudadas, tais como: substituição após um número especificado de revisões, substituição ou revisão em intervalos constantes, etc..

Em muitos casos, não se consegue facilmente perceber se os modelos de substituição se aplicam a componentes ou sistemas ou a ambos. Esta dificuldade surge principalmente devido ao facto da taxa de avarias e da função de risco serem frequentemente confundidas.

A maioria dos modelos procuram minimizar o custo total de manutenção. Existem alguns, no entanto, que procuram minimizar o tempo de paragem do equipamento ou maximizar a disponibilidade, medida esta que se reflecte posteriormente nos custos de operação. Outras medidas, para além das anteriores, apenas se encontram pontualmente.

A maior parte dos modelos consideram que, após a realização de uma acção de manutenção correctiva ou preventiva, o equipamento está num estado idêntico ao de um equipamento novo (conceito *as good as new*). A realização de reparações ou revisões perfeitas, que envolve a substituição de peças ou componentes do equipamento, confunde-se por vezes com a substituição preventiva do próprio equipamento. Outros modelos consideram que o sistema se encontra num estado idêntico ao anterior à avaria (conceito *as bad as old*). Outros ainda

contemplam a possibilidade de realização de reparações ou revisões imperfeitas (estado intermédio entre novo e estado idêntico ao anterior à avaria).

Para os sistemas que requerem uma inspecção para identificar o estado de falha, encontram-se na literatura modelos destinados a determinar o escalonamento óptimo das operações de inspecção, balanceando os custos de inspecção com os custos originados pela não detecção da avaria.

A grande maioria dos modelos procuram optimizar individualmente a manutenção dos equipamentos. As contribuições bibliográficas na área da optimização conjunta da manutenção de vários equipamentos são bastante menos numerosos. A manutenção em grupo traz a vantagem de se poder utilizar materiais e peças comuns e torna possível a racionalização dos recursos humanos.

Num sistema formado por vários equipamentos, idênticos ou não, há muitas vezes vantagem económica em realizar as manutenções em grupo. Na produção em linha, por exemplo, verifica-se que a paragem de um dos equipamentos paralisa todo o sistema. Essa paragem deve ser aproveitada para realizar a manutenção dos restantes equipamentos, sejam eles idênticos ou não. Alguns autores propõem modelos para agrupar equipamentos para a realização da manutenção, de forma a optimizar uma determinada medida de desempenho. A optimização da manutenção em grupo aplica-se também aos casos em que determinados recursos de manutenção são partilhados, nomeadamente os equipamentos destinados a substituir equipamentos inoperacionais. Os modelos propostos na literatura pretendem quantificar o número de recursos partilhados e definir a política de manutenção a adoptar.

O presente capítulo encontra-se estruturado da seguinte forma:

– na secção 1 apresentam-se de uma forma estruturada os modelos de manutenção preventiva existentes na literatura;

– na secção 2 apresentam-se algumas políticas de reparação e respectivos modelos;

– a secção 3 incide sobre os modelos de inspecção destinados a detectar a necessidade de uma acção de manutenção condicionada ou, simplesmente, para detectar a existência de falhas;

– a secção 4 apresenta alguns modelos destinados a coordenar a manutenção de vários equipamentos;

– a secção 5 incide sobre os modelos de manutenção para sistemas formados por M equipamentos idênticos;

– a sétima e última secção apresenta um tipo de sistemas designado por sistemas de inventário multi-escalão de itens de reserva.

3.1. Modelos de Manutenção Preventiva

3.1.1. Introdução

Encontram-se na literatura vários modelos de manutenção preventiva que propõem diferentes políticas de substituição. Utilizando a classificação feita por Ascher & Feingold (1984) existem:

- as políticas que consideram que a substituição dos itens é realizada depois de decorrido um intervalo de tempo fixo de operação (T) do sistema sem avarias, ou então quando ocorre uma avaria (figura 10). Ascher & Feingold (1984) caracterizam-nas como política ou modelo do tipo 1 e destacam os trabalhos de Barlow & Hunter (1960), de Barlow & Proschan (1965), de Makabe & Morimura (1963), de Glasser (1967) e de Fox (1966). O modelo de tipo 1 pressupõe que os tempos entre avarias são independentes e identicamente distribuídos ou que a função de risco dos itens é crescente.
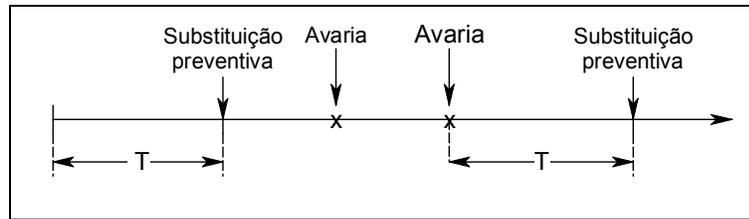
Figura 10: Substituição em intervalos de operação constantes

- As políticas que consideram a substituição em intervalos de tempo de operação constantes e independentes do número de falhas (figura 11). Estas são as políticas que Ascher & Feingold (1984) chamaram de políticas do tipo 2. Ascher & Feingold (1984) realçam os trabalhos de Barlow & Hunter (1960), Makabe & Morimura (1963) e de Sivazlian (1973).
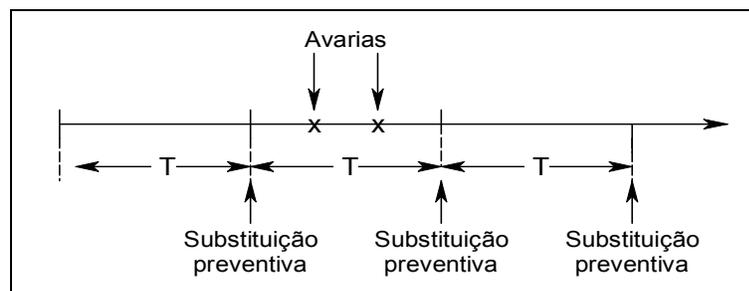
Figura 11: Substituição em intervalos de tempo constantes

- Para outras políticas, a substituição ocorre após um número pré-especificado de falhas. Depois de cada uma destas falhas ocorrerem, o sistema sofre uma reparação mínima e na próxima avaria o sistema é substituído. Ascher & Feingold (1984) designam-nas de políticas do tipo 3 e citam os trabalhos de: Makabe & Morimura (1963) e Park (1979).
- Existem outras políticas que introduzem algumas alterações às políticas anteriores e ainda outras que são combinações dessas políticas (as políticas do tipo 1 modificas de Schaeffer (1971), Cléroux & Hanscom (1974), Ran & Rosenlund (1976), Cléroux, Dubuc, et al. (1979) e de Nakagawa (1980), as políticas do tipo 4 de Makabe & Morimura (1963), do tipo 2´ e 3´ de Morimura (1970) e Muth (1977), apresentadas por Ascher & Feingold (1984)).

As políticas até aqui expostas, são políticas que consideram um intervalo de tempo para a substituição planeada dos sistemas. Ascher & Feingold (1984) apresentam outra classe de políticas de substituição que se baseiam na limitação dos custos de reparação - políticas estudadas por Hastings (1969) e por Drinkwater & Hastings (1967). Se o custo de reparação exceder o custo limite imposto, procede-se à substituição do equipamento e se o custo de reparação for inferior ao custo limite, procede-se à reparação mínima do equipamento.

Faz-se a seguir uma exposição dos trabalhos mais recentes no âmbito da modelação de manutenções preventivas e substituição de sistemas, realçando as políticas de manutenção consideradas por cada modelo.

3.1.2. Substituição Baseada na Idade dos Sistemas

No artigo "*Optimal replacement for a one-unit system subject to delivery and test*" (Liao & Yuan (1998)), os autores propõem um modelo para determinar a idade limite de substituição T de um item, considerando que o item é substituído quando falha ou quando atinge a idade limite, tal como no modelo de Barlow & Proschan (1965). No entanto, o modelo considera que a unidade sobresselente não está sempre disponível (existindo um *buffer* que armazena apenas uma unidade), sendo encomendada quando é iniciada a substituição, tal como no modelo de Nakagawa & Osaki (1974). O modelo constitui uma extensão ao modelo de Nakagawa & Osaki (1974) porque, para além de considerar que a unidade sobresselente não está sempre disponível, também considera que a unidade sobresselente é sujeita a um teste de qualidade quando é entregue. Se a unidade não for aceite, é feito um novo pedido. Dois modelos são apresentados; o primeiro considera que o prazo de entrega da unidade sobresselente é determinístico e o segundo considera um prazo de duração aleatória. O critério de optimização é a minimização do custo por unidade de tempo. Os autores determinam a expressão do custo por unidade de tempo, através da razão entre o custo esperado num ciclo e o

comprimento médio de ciclo (intervalo entre duas substituições). O modelo não toma em consideração o custo de perda de produção incorrido, devido à espera da unidade sobresselente quando ocorre uma falha.

Sheu & Griffith (2001) apresentam um modelo para determinar a idade de substituição de uma unidade em operação e, tal como no modelo anterior, consideram que a unidade sobresselente nem sempre está disponível. O modelo proposto considera dois tipos de falha: a falha tipo I (falha mínima) que é corrigida através de uma reparação que repõe o sistema num estado idêntico ao imediatamente anterior à avaria; a falha tipo II (falha grave) que obriga à substituição do equipamento. O prazo de entrega da unidade sobresselente é aleatório (descrito por uma distribuição de probabilidade). Se o prazo de entrega terminar antes de ocorrer uma falha tipo II ou antes da substituição preventiva planeada, a substituição poderá ser realizada quando ocorrer a avaria do tipo II ou no instante previsto para a substituição preventiva. Caso contrário, a substituição só poderá ser realizada quando terminar o prazo de entrega da unidade. A medida de eficiência utilizada é o custo esperado por unidade de tempo. O custo esperado inclui o custo de substituição, o custo de posse da unidade sobresselente, o custo de paragem do sistema e o custo de reparação das falhas do tipo I.

O artigo de Scarf & Bouamra (1999) apresenta uma abordagem para resolver o problema da substituição de uma frota de equipamentos. Foi desenvolvido um modelo de substituição que também se baseia na idade do equipamento, mas neste caso para um conjunto de equipamentos. O modelo considera dois ciclos: um primeiro em que a frota é mantida durante K unidades de tempo e um segundo, que se inicia com a substituição da frota por outra de tamanho diferente. O segundo ciclo tem uma duração de L unidades de tempo após o qual a frota é substituída por outra do mesmo tamanho. Parece realista permitir que o tamanho da frota possa ser diferente do inicial porque a

fiabilidade e disponibilidade dos equipamentos novos são, na maior parte das vezes, superiores. Através de equações diferenciais, os autores determinam a probabilidade de existirem i equipamentos avariados no instante t, considerando uma taxa de avarias variável com o tempo e uma taxa de reparação fixa. Sempre que a procura não é satisfeita, incorre-se numa penalização. Através das probabilidades, os autores determinam a procura média não satisfeita no instante t e o valor médio da penalização incorrida no mesmo instante. O valor da penalização integra a expressão do custo total. A minimização do custo total permite determinar a idade e tamanho da frota na altura da substituição.

3.1.3. Substituição em Intervalos de Tempo Fixos

Jardine (1973) propõe um modelo de substituição em intervalos constantes para sistemas cujos custos de operação aumentam com o uso. O aumento dos custos de operação é originado pela degradação de alguns dos componentes que constituem o equipamento. São apresentados dois modelos: o primeiro considera um horizonte de tempo infinito e o segundo, um horizonte de tempo finito. Ambos pretendem determinar o intervalo óptimo de substituição de componentes que minimiza a soma dos custos de operação com os custos de substituição.

No artigo "*Optimum replacement intervals with random time horizon*" de Yun & Choi (2000), os autores apresentam um modelo para determinar o intervalo de tempo entre substituições, considerando um horizonte de tempo aleatório e a realização de reparações mínimas sempre que o sistema avaria. Tal modelo surge pela constatação que, em muitos tipos de sistemas tais como hardware/software, robôs, controlos automáticos, e outras tecnologias electrónicas, o ciclo de vida dos produtos é cada vez mais pequeno. A maior parte das políticas de manutenção, tal como a de Jardine (1973), considera um horizonte de tempo infinito ou um horizonte de tempo fixo. No

entanto, é difícil determinar o valor exacto do horizonte de tempo de um sistema. Sendo assim, o modelo proposto considera a incerteza em relação ao horizonte de tempo. O critério de optimização é o custo total esperado, que deve ser minimizado, e a variável de decisão é o intervalo óptimo de substituição.

Bahrami-G, Price, et al. (2000) propõem um modelo simplificado em relação ao modelo clássico de substituição em intervalos constantes (Barlow & Proschan (1965)). O modelo apoia-se na seguinte hipótese: quando uma peça de um equipamento se encontra na fase de desgaste, a aplicação da substituição preventiva em intervalos constantes reduz o tempo total de paragem do equipamento. O objectivo do modelo é o de determinar o período óptimo de substituição que minimiza o tempo total de paragem. O modelo é dito simplificado devido à forma proposta para avaliação do número esperado de falhas. Um método numérico (Algoritmo de Newton-Rhapson) é utilizado para obter a solução que minimiza o tempo total de paragem. O modelo proposto é comparado com o modelo clássico através de um exemplo. Os resultados obtidos são muito próximos. Os autores concluíram que o modelo proposto permite obter resultados semelhantes aos obtidos com o modelo clássico, sendo a aplicação mais fácil.

O artigo "*Incorporating overall probability of system failure into a preventive maintenance model for a serial system*" (Kardon & Fredendall (2002)) apresenta um modelo de substituição em intervalos de tempo constantes para sistemas compostos por uma série de máquinas, cada uma constituída por vários componentes. Os autores apresentam, em primeiro lugar, um modelo de manutenção preventiva, que considera as probabilidades de falha e os custos de manutenção para uma máquina com um único componente. Kardon & Fredendall (2002) assumem que os tempos de falha dos componentes seguem uma distribuição de Weibull e determinam o intervalo de manutenção preventiva com base na probabilidade de falha máxima

pretendida para o sistema. O modelo é estendido a máquinas com vários componentes e a sistemas compostos por várias máquinas com vários componentes. Neste último caso, são analisadas várias políticas de manutenção possíveis, desde a substituição individual de cada componente com base no intervalo de substituição calculado individualmente, até à substituição em bloco para o menor intervalo de substituição.

3.1.4. Substituição após N Revisões

Baseando-se no modelo de Nakagawa (1986), Reddy & Rao (1996) propõem um modelo para sistemas com taxa de avarias crescente, que pressupõe que a duração de uma reparação é de "a" unidades de tempo e que as durações de revisões sucessivas constituem um processo geométrico não decrescente. Tal como o modelo de Nakagawa (1986), o modelo considera a realização de revisões em intervalos constantes de duração T, a substituição após N revisões e a reparação mínima quando ocorre uma avaria. O critério de decisão é a minimização do custo total por unidade de tempo. Com base nesse critério, os autores apresentam dois teoremas: o primeiro permite determinar N óptimo, sendo o intervalo entre revisões (T) fixo, e o segundo determina T óptimo, sendo N fixo. Com base nos dois teoremas, os autores apresentam posteriormente um algoritmo que determina, em simultâneo, o par óptimo (N,T).

Ben-Daya & Alghamdi (2000) apresentam dois modelos para escalonamento das manutenções preventivas. Os autores assumem que as manutenções preventivas são imperfeitas, o que corresponde a uma redução na idade do equipamento proporcional ao custo da manutenção preventiva. O nível de manutenção que proporciona o menor custo total esperado de manutenção corresponde ao nível óptimo. Os autores consideram que o sistema é submetido a uma reparação mínima quando avaria e é substituído após N manutenções preventivas. O objectivo do modelo consiste em encontrar o intervalo

entre manutenções preventivas, o instante de substituição e o nível de manutenção preventiva. No segundo modelo é introduzida uma restrição: os intervalos de manutenção são definidos de tal forma que a taxa de avarias integrada em cada intervalo seja a mesma para todos os intervalos, o que reduz o número de variáveis de decisão de N+2 variáveis para três. Uma vez determinado o comprimento do primeiro intervalo de manutenção, pode determinar-se o comprimento dos restantes intervalos.

O artigo de Sarker & Yu (1995) considera um sistema com taxa de avarias crescente, cujo valor não pode exceder um limite imposto. Quando a taxa de avarias atinge o valor máximo permitido, realiza-se uma manutenção preventiva ou a substituição do equipamento. Sempre que for realizada uma manutenção preventiva, a taxa de avarias sofre uma redução, que é determinada com base num factor de melhoria (revisão imperfeita). O objectivo do trabalho apresentado no artigo consiste na determinação do número de substituições num período de planeamento definido e do número de manutenções preventivas entre duas substituições sucessivas, procurando minimizar o custo total de manutenção. Para atingir esse objectivo, foi desenvolvido um modelo de programação matemática cuja solução é obtida através de um algoritmo (*Balanced Maintenance Scheduling*). O algoritmo permite encontrar o número óptimo de substituições e o escalonamento óptimo das manutenções preventivas. O escalonamento de manutenções preventivas diz-se balanceado porque considera que o número de manutenções entre quaisquer duas substituições sucessivas é distribuído uniformemente.

Kabir (1996) apresenta um estudo sobre o problema das revisões/substituições para uma frota de autocarros de uma companhia de transporte da Arábia Saudita, e utiliza dois modelos para a tomada de decisão. O autor determina, em primeiro lugar, o custo máximo atribuível a uma revisão com base no modelo apresentado por Jardine (1973). Se o custo de revisão excede um determinado limite,

torna-se mais vantajoso substituir o equipamento. Com base no modelo de Roll & Sachish (1978), o autor determina também o período e número de revisões a realizar antes de se proceder à substituição do equipamento. Este último modelo considera que as revisões provocam uma melhoria no desempenho dos sistemas, que se traduz numa redução nos custos de operação e manutenção. Essa redução é reflectida no modelo pela inclusão de uma função de ganho, que é subtraída à expressão dos restantes custos. Para o caso apresentado no artigo, as expressões do custo de operação e do ganho foram estimadas subjectivamente por não existirem dados registados.

3.1.5. Substituição em Intervalos de Tempo Fixos ou após N Falhas

O artigo "*Determining replacement policies for bus engines*" de Leung & Cheng (2000) considera uma política de manutenção e respectivo modelo propostos por Nakagawa & Kowada (1983), em que os sistemas são substituídos após um intervalo de tempo fixo T ou, se ocorrer primeiro, depois de um número fixo de falhas N. Os autores apresentam um estudo sobre os motores dos autocarros de uma companhia de transportes em Hong Kong. Os dados de falha disponíveis são analisados através de um teste de tendência (o teste de Laplace) para verificar se um determinado tipo de motor apresenta ou não tendência na ocorrência de falhas, e de um teste de qualidade de ajuste (teste de Cramer-von Mises) para verificar se os tempos de falha seguem um processo de Poisson não Homogéneo. O processo de Poisson não Homogéneo é modelado pelo "*Power Law Process*" (Crow (1974)), cujos parâmetros são estimados através do método da máxima verosimilhança. As variáveis de decisão T e N que minimizam os custos esperados a longo prazo para cada tipo de motor são determinadas. No entanto, os autores não conseguiram dados suficientes para conduzir uma análise estatística real e para obter uma conclusão significativa para a aplicação considerada. O método da

máxima verosimilhança para estimação dos parâmetros é baseada na teoria dos grandes números.

3.1.6. Substituição após N Falhas e Revisões em Intervalos de Tempo de Operação Constantes

Zhang (2002) estuda um sistema reparável em fase de deterioração. É proposta uma política de manutenção que prevê a realização de acções preventivas de reparação (*Preventive Repair*) em intervalos de duração fixa. O sistema é substituído após a ocorrência de N falhas. As reparações preventivas são ditas perfeitas e as reparações das avarias são reparações mínimas. O autor considera que os períodos sucessivos de operação formam um processo geométrico estocástico decrescente e que os tempos ou durações das reparações (preventiva ou após a falha) formam um processo geométrico crescente. O objectivo foi o de encontrar a política óptima de substituição que minimiza o custo médio por unidade de tempo (a longo prazo). A expressão do custo médio por unidade de tempo foi encontrado e permite determinar numérica ou analiticamente a política óptima. O artigo mostra ainda que a política com reparação preventiva é melhor do que a política sem reparação preventiva.

3.1.7. Substituição Dependente do Tempo de Reparação

Dohi, Ashioka, et al. (2001) descrevem um modelo para o problema da reparação com limitação de tempo. Quando uma unidade falha, a reparação inicia-se imediatamente, sendo o tempo de reparação aleatório. Se a reparação terminar antes do tempo limite t_0, a unidade é instalada nesse instante. Caso contrário (o tempo de reparação é maior do que t_0), a reparação é cancelada e procede-se ao pedido de uma unidade sobresselente que é entregue num prazo fixo designado por L. Os autores consideram duas variáveis aleatórias diferentes para descrever o tempo de falha após reparação e o tempo de falha após substituição. A função objectivo do modelo consiste na minimização do

custo total descontado (valor presente) por unidade de tempo. O artigo apresenta também um método gráfico para determinar o tempo limite de reparação que minimiza o custo total descontado esperado ao longo de um horizonte de tempo infinito.

3.1.8. Substituição Dependente dos Custos de Manutenção

Beichelt (2001) propõe uma política de substituição baseada nos custos de manutenção. O sistema é substituído por outro idêntico, logo que os custos de manutenção atingem ou excedem um determinado limite num ciclo de substituição. Esta política é comparada com a abordagem baseada na vida económica do sistema (o sistema é substituído quando o custo unitário de manutenção de longo prazo é mínimo). O autor considerou três distribuições distintas para descrever os custos acumulados de manutenção: *Power distribution*, *Raleigh-distribution* e *Maxwel distribution*; e mostrou que a política proposta é superior à política que se baseia na vida económica. A estrutura simples da política proposta, o facto dos custos de manutenção estarem habitualmente disponíveis e de não ser necessário informação sobre a distribuição do tempo de vida dos sistemas, facilita a sua aplicação.

3.1.9. Vários Critérios de Decisão

Azaiez (2002) apresenta um caso real que consiste no problema do desgaste das cabeças de colocação de cápsulas em garrafas de refrigerante. O objectivo foi o de determinar a política óptima de substituição das cabeças, considerando vários critérios para a tomada de decisão. O critério de optimização considerado foi, em primeiro lugar, a minimização dos custos. O autor considerou em seguida, para além dos custos, a qualidade, a produtividade e a disponibilidade de *cash-flow*. A razão de tais critérios prende-se com a constatação que os gestores não se preocupam apenas com os custos, mas também com a perda de qualidade originada pelo desgaste do equipamento; com o tempo de inactividade dos equipamentos que, para além de

diminuir a produtividade, afecta negativamente o moral dos trabalhadores; e com a disponibilidade de *cash-flow*. Para auxiliar o gestor na tomada de decisão, o autor integrou todos os atributos de decisão numa função que designou por função utilidade com multi-atributos.

3.2. Políticas de Reparação

Nas actividades de manutenção, a tomada de decisão pode também incidir sobre a política de reparação a seguir para um determinado sistema em falha. A escolha da política de reparação pode ter uma influência importante nos custos de manutenção e na disponibilidade do equipamento.

O artigo de Sridharan & Mohanavadivu (1997) considera duas políticas de reparação para um sistema formado por uma unidade activa e uma unidade em reserva. A diferença entre as políticas de reparação incide sobre o instante de início da realização da reparação. A primeira política considera que a reparação pode ser iniciada a qualquer instante (logo que a unidade activa falhe), uma vez que os recursos de reparação estão sempre disponíveis. A segunda política considera que a reparação é iniciada quando as duas unidades se encontram avariadas e termina quando ambas estiverem operacionais. O artigo apresenta o diagrama de estado para cada política. As duas políticas são analisadas e comparadas em relação à disponibilidade e ao lucro. Assumindo a distribuição Exponencial Negativa para o tempo de falha e reparação das unidades, os autores concluem que a segunda política é melhor do ponto de vista do lucro e que a primeira proporciona uma maior disponibilidade.

O artigo de Perlman, Mehrez, et al. (2001) também considera duas políticas de reparação, mas neste caso a decisão incide sobre o modo de reparação que pode ser rápido ou normal. O artigo trata de sistemas de inventários de itens de reserva com multi-escalão, isto é, sistemas com várias localizações de inventários (tratados na secção

3.6). São considerados dois escalões: no primeiro estão as bases (utilizadores) e no segundo, o depósito ou armazém (serviço central). O depósito fornece as bases. As bases podem optar pelo modo de reparação normal ou pelo modo de reparação rápido. Quando uma falha ocorre, a base envia o item em falha para o depósito onde será reparado pelo modo de reparação rápido ou normal.

3.3. Modelos de Inspecção

3.3.1. Introdução

Este capítulo apresenta alguns modelos para escalonamento de inspecções. O objectivo das inspecções é o de identificar o estado dos sistemas, que pode ser medido através de vários indicadores, tais como a temperatura, a vibração, a qualidade do *output* etc.. Em função do estado dos sistemas, uma acção de manutenção poderá ser iniciada.

A inspecção realizada periodicamente permite detectar anomalias, que podem originar a falha de um sistema, e possibilita a diminuição do número de falhas do sistema através de acções preventivas: as chamadas manutenções preventivas condicionadas.

Por outro lado, para alguns sistemas o estado de falha pode não ser facilmente identificável, o que também depende da definição de falha. Nestes casos, o objectivo da inspecção é o de identificar se o sistema efectivamente avariou ou não.

A seguir apresentam-se alguns modelos que reflectem estas duas situações.

3.3.2. Modelos de Inspecção para Prognóstico de Falha

Sherwin & Al-Najjar (1999) propõem um modelo Markoviano para determinar o intervalo óptimo de inspecção de componentes complexos sujeitos a um desgaste faseado, integrados num sistema

com elevados custos de paragem. Os autores apresentam o exemplo da inspecção de chumaceiras de contacto de esferas utilizadas para suportar os cilindros de laminação numa fábrica de papel. As inspecções realizadas em intervalos de tempo exponencialmente distribuídos permitem aumentar o tempo de operação do sistema através da realização de intervenções preventivas na iminência da ocorrência de uma falha. Para modelar o desgaste do sistema, são consideradas três fases distintas de degradação em que a taxa de transição e de permanência são constantes. Na última fase e para aproximar mais adequadamente a taxa crescente, os autores consideram duas subfases com taxas de transição constantes e tempos de permanência distribuídos exponencialmente. A frequência de inspecção do sistema é diferente em cada uma das três fases e na última, considera-se monitorização ou inspecção contínua. A passagem para a fase seguinte é um processo de Poisson e é identificada através das inspecções. O modelo apresentado é comparado com vários outros: modelo de inspecção para uma política geralmente utilizado para as ditas chumaceiras (i.e. substituição após um aumento significativo da vibração), modelo sem manutenção preventiva, modelo com monitorização contínua em todas as fases, e modelo sem monitorização contínua e com duas frequências de inspecção.

O artigo "*An inspection model with minimal and major maintenance for a system with deterioration and Poisson failures*" de Hosseini, Kerr, et al. (2000) apresenta um modelo de manutenção condicionada para sistemas sujeitos a dois tipos de falha: falhas de desgaste, que são previsíveis e identificáveis através da inspecção, e falhas não previsíveis distribuídas segundo um processo de Poisson. O processo de desgaste é representado por um processo Markoviano multi-estado. Em função do estado de deterioração do sistema que é identificado através de inspecção periódica, é realizada uma manutenção mínima (o sistema volta ao estado de degradação anterior), uma manutenção máxima (o sistema fica como novo) ou não é feito nada. Se ocorrer uma falha de desgaste, procede-se à reparação máxima. Se ocorrer

uma falha de Poisson, procede-se à reparação mínima. O modelo de manutenção condicionada proposto utiliza a ferramenta GSPN (*Generalized Stochastic Petri Net*) para representar e analisar o sistema. O modelo proposto permite determinar a política óptima de inspecção, através da maximização da produtividade, ou da minimização do número de falhas (relevante devido à segurança e aos factores ambientais).

Os autores Mathew & Kennedy (2002) no seu artigo "*Minimising equipment down time under shock load conditions*" exprimem o tempo de paragem de um sistema sujeito a sobrecargas periódicas como sendo função da frequência de inspecção e da frequência média das sobrecargas. A realização das inspecções permite detectar a deterioração do sistema e prevenir a falha. O objectivo do modelo proposto é o de encontrar a frequência de inspecção que minimiza o tempo de paragem para os sistemas sujeitos a este tipo de condições, tendo em consideração a frequência das sobrecargas e a sua intensidade. Considera-se que a taxa média de sobrecarga do sistema é conhecida e que o número de sobrecargas segue uma distribuição de Poisson. Sempre que o sistema falha, ele é submetido a uma reparação perfeita. O tempo de paragem é visto como o intervalo de tempo entre a falha e o inicio de um novo ciclo, que começa após a finalização da reparação.

3.3.3. Modelos de Inspecção para Detecção de Falhas

Ben-Daya & Hariga (1998) consideram uma máquina que está sujeita a falhas que podem ser detectadas apenas por inspecção. Os autores propõem um modelo de inspecção, que é uma extensão ao modelo de Baker (1990), para encontrar o intervalo de inspecção T que maximiza o lucro. O modelo de Baker (1990) considera que a produção pára quando ocorre uma falha. No modelo apresentado, a falha é vista como uma alteração do processo do estado *sob controlo* para o estado *fora de controlo*. Durante o estado de falha são produzidos itens

defeituosos, o que é reflectido no modelo através de uma redução no lucro. Os autores pressupõem que as durações da inspecção e das reparações são constantes e que o tempo entre falhas segue uma distribuição Exponencial Negativa. É apresentado um algoritmo para encontrar a solução óptima do problema e um procedimento para encontrar uma solução aproximada.

O objectivo do artigo de Chung & Ting (1994) é de determinar a política de inspecções que são realizadas para identificar o estado de falha de um determinado sistema através da inspecção dos seus componentes. Foi desenvolvido um algoritmo para determinar os componentes a inspeccionar em simultâneo e a periodicidade óptima de inspecção. O sistema encontra-se num estado de falha quando um dos seus componentes está avariado. O algoritmo baseia-se no modelo de Arnold (1992). Através da função objectivo desenvolvida por Arnold (1992), o algoritmo permite analisar e comparar as várias alternativas de inspecção (as diferentes partições possíveis) e escolher a política de inspecção que maximiza a função objectivo, que inclui os ganhos e custos das inspecções e das reparações.

3.3.4. Modelos de Inspecção para Prognóstico e Detecção de Falhas

Grall, Dieulle, et al. (2002) apresentam um modelo matemático de custos de manutenção para determinar o escalonamento óptimo de inspecção e o limite óptimo de substituição para um sistema submetido a acções de manutenção condicionada. O sistema sofre uma degradação contínua e progressiva e está sujeito a falhas detectáveis apenas por inspecção quando o seu estado de degradação ultrapassa um nível L. O sistema é controlado por inspecções perfeitas que detectam as falhas. Quando uma falha é detectada, o sistema em falha é substituído por um idêntico. Para diminuir os custos incorridos devido à ocorrência de falhas inesperadas, o sistema é substituído preventivamente quando o seu estado ultrapassa um limite pré-

determinado M (inferior a L). Para além de se proceder a substituições dos equipamentos, podem ainda ser realizadas revisões ou reparações perfeitas, de forma a que o sistema fique num estado próximo ao de um sistema novo.

Bahrami-Ghasrchami, Price, et al. (1998) desenvolvem uma função que descreve o efeito das inspecções periódicas na taxa de avarias de sistemas complexos. Os autores apoiam-se em funções desenvolvidas anteriormente, nomeadamente na função desenvolvida por Jardine (1973), que foi a primeira a descrever os efeitos das inspecções na taxa de avarias. A função de Jardine assume que a taxa de avarias varia inversamente com o número de inspecções. Bahrami-Ghasrchami, Price, et al. (1998) consideram que a função é dependente não só da frequência como também da eficiência das inspecções e que a distribuição do tempo entre falhas tende para uma distribuição Exponencial Negativa com o aumento da complexidade do sistema e do tempo de operação. Após a apresentação da função da taxa de avarias do sistema, Bahrami-Ghasrchami, Price, et al. (1998) apresentam um modelo de optimização para o cálculo da periodicidade óptima de inspecção baseado na minimização do tempo esperado de paragem por ciclo (o ciclo inicia-se e termina com a falha do sistema).

3.4. Modelos que Procuram Coordenar a Manutenção de vários Equipamentos

O artigo de Hariga (1994) desenvolve um algoritmo para determinar o escalonamento de manutenção para um grupo de máquinas distintas. Distinguem-se dois tipos de acções de manutenção, as manutenções menores e as manutenções maiores. A manutenção menor é uma revisão que é efectuada individualmente para cada máquina após ter decorrido um determinado intervalo de tempo sem avarias e, segundo o autor, não traz o equipamento para uma condição idêntica à de um equipamento novo, tal como ocorre com uma manutenção maior. A manutenção maior é uma revisão simultânea de todas as máquinas do sistema.

O autor considera que as máquinas degradam-se com o tempo, o que se reflecte nos custos de operação. O modelo desenvolvido procura minimizar o custo total do ciclo (um ciclo começa e termina com uma manutenção maior), que inclui o custo da manutenção maior, os custos das manutenções menores e o custo de operação do sistema, que aumenta com o tempo. Sendo o modelo muito difícil de resolver, foi desenvolvido um método heurístico para encontrar o tempo de ciclo e a frequência de revisões menores perto do óptimo. O procedimento para obter uma solução perto do óptimo consiste em encontrar a solução do problema relaxado e posteriormente, de uma forma iterativa, aproximar-se do óptimo.

No mesmo ano, Duffuaa & Ben-Daya (1994) também propuseram um modelo para coordenar o escalonamento da manutenção de várias unidades produtivas não idênticas e, tal como no modelo anterior, consideraram a realização de revisões maiores e revisões menores. O modelo de Duffuaa & Ben-Daya (1994) permite determinar os tempos entre revisões maiores e menores que minimizam o custo total de operação. Os autores consideraram que o custo total é composto pelo custo de reparação, pelo custo de produção e pelo custo de coordenar as revisões em simultâneo, que depende da diferença entre o período óptimo de revisão calculado individualmente para cada máquina e o período óptimo para realização das revisões maiores.

Talukder & Knapp (2002) apresentam um método heurístico que procura agrupar equipamentos em série para realizar revisões em simultâneo. O objectivo é minimizar o tempo de paragem do sistema formado por equipamentos em série, determinando um único intervalo entre revisão para um grupo de equipamentos. O critério para proceder ao agrupamento dos equipamentos é a minimização do custo total de manutenção para o sistema. A metodologia utilizada baseia-se nas distribuições de falha de cada equipamento, na relação entre o custo de avarias e o custo de revisão e no intervalo tempo entre manutenções individuais.

3.5. Modelos de Manutenção para M Equipamentos Activos e Idênticos

Um sistema em que um número definido de equipamentos idênticos é apoiado por um conjunto de equipamentos de reserva é mais frequentemente designado na literatura anglo-saxónica por *Maintenance Float System*. Gupta & Rao (1996) designam os modelos que pretendem dimensionar ou determinar as medidas de desempenho destes sistemas de *Machine Interference Models*.

Estes tipos de problemas foram inicialmente descritos como modelos de fila de espera por Barlow & Proschan (1965). A primeira tentativa para determinar o número de equipamentos de reserva foi proposto por Levine (1965) que utilizou métodos analíticos baseados na teoria tradicional da fiabilidade. Os métodos introduziam um factor de fiabilidade baseado no rácio (MTTR/MTBF) e permitiam deduzir a política de manutenção para o sistema assumindo distribuições de falhas e de reparações exponenciais. Posteriormente, outros autores utilizaram diversas distribuições para determinar o número mínimo de equipamentos de reserva que minimiza o tempo médio de paragem do equipamento ou que maximiza a disponibilidade do equipamento, com base em métodos analíticos. Shankar & Sahani (2003) fazem a enumeração das contribuições nesta área.

Vários estudos foram levados a cabo baseados na técnica de simulação, mas os dados obtidos da simulação eram meramente descritivos e os resultados limitados apenas aos valores dos parâmetros especificados. Devido a esse facto, surgiu a utilização de metamodelos (Madu & Kuei (1992a); Madu & Kuei (1992b); Madu, Lyeu, et al. (1994); Kuei & Madu (1994)). Os metamodelos são modelos obtidos através da simulação que exprimem o relacionamento entre o *input* e o *output* na forma de uma equação de regressão. Os metamodelos podem ser construídos com base nos métodos de Taguchi (Madu & Kuei (1992a); Madu (1999)) ou com base em rede neuronais (Chen & Tseng (2003)).

Madu (1999) desenvolveu uma metodologia para projectar um sistema composto por duas células de fabrico em funcionamento paralelo sendo cada uma constituída por um conjunto de máquinas idênticas. O sistema é apoiado por um centro de reparação e equipamentos de reserva. O autor recorreu ao uso do planeamento de experiências de Taguchi para construir um metamodelo que relaciona as variáveis independentes com a variável dependente. A variável dependente ou de resposta em estudo é a utilização média de cada célula de fabrico. As variáveis que a influenciam são classificadas como variáveis controláveis (de projecto) e variáveis incontroláveis (ou de ruído). As variáveis controláveis são: o número de equipamentos na célula 1, o número de equipamentos na célula 2, o número de equipamento em *standby* na célula 1, o número de equipamentos em *standby* na célula 2 e o número de pessoas na equipa de manutenção. As variáveis incontroláveis são: o tempo médio de reparação, o tempo entre avarias na célula 1 e o tempo entre avarias na célula 2. Para construir o metamodelo foi definida uma matriz ortogonal e foram levadas a cabo experiências simuladas cujos resultados permitem identificar os factores significativos e obter o metamodelo. Com base no metamodelo é deduzido um modelo de custos que permitirá encontrar, através de um algoritmo de pesquisa, os valores óptimos dos parâmetros de entrada. A utilização do procedimento descrito depende, no entanto, da determinação ou do conhecimento do intervalo possível para as variáveis dependentes (para possibilitar a utilização do planeamento de experiências).

Chen & Tseng (2003) propõem a utilização de redes neuronais para construir um metamodelo. Com base nos metamodelos, os autores formularam um modelo de decisão para optimizar a manutenção dos *float systems*. Para resolver o modelo matemático de decisão, os autores desenvolvem um algoritmo genético de optimização. O objectivo do modelo de decisão é o de determinar o número de máquinas inicialmente em operação, o número de máquinas de reserva, o número de pessoal de reparação e o tempo de reparação

esperado que minimizam o custo total esperado. Os autores procuraram também satisfazer algumas medidas de desempenho dos *float systems* tais como: a utilização média dos equipamentos, a utilização média do pessoal de reparação e o tempo médio de espera pela reparação.

A manutenção dos *float systems* foi tratada com base em modelos analíticos, mais recentemente, por Gupta & Rao (1996), Gupta (1997), Zeng & Zhang (1997), e por Shankar & Sahani (2003).

Gupta & Rao (1996) apresentam um modelo recursivo para determinar a distribuição de probabilidade do número de máquinas indisponíveis (avariadas) num período de tempo arbitrário para um sistema com K máquinas em operação e Y máquinas de reserva. Os autores consideram uma fila de espera do tipo M/G/1 (apenas 1 servidor). Os autores também deduzem algumas medidas de desempenho: o número médio de máquinas indisponíveis, o tempo médio de espera para a reparação, o número médio de máquinas em reserva, o número médio de máquinas activas, a disponibilidade das máquinas e a utilização do operador. O método pode ser utilizado para qualquer distribuição do tempo de reparação, tal como a distribuição Exponencial Negativa, Erlang com h estágios e hiperexponencial com h estágios.

Gupta (1997) considera um sistema com apenas um servidor, tal como no modelo anterior, que se ausenta por um período de duração aleatória sempre que a estação de reparação fica vazia. Para além disso, o autor também assume que as máquinas de reserva podem avariar quando estão inactivas. O autor desenvolve as expressões para determinar as probabilidades de estado, que é definido pelo número de máquinas avariadas, e as medidas de desempenho do sistema.

Da mesma forma que Gupta (1997), também Zeng & Zhang (1997) tratam do problema dos *float systems* mas consideram que a estação de trabalho necessita de apenas uma unidade para assegurar o funcionamento da estação e que a estação de reparação conta com

vários servidores em paralelo. A estação de trabalho é apoiada por um *buffer* com várias unidades de reserva. Os autores propuseram um algoritmo para encontrar os valores óptimos da capacidade do *buffer* (número de itens de reserva), do número de equipas de reparação e da taxa de reparação de cada equipa, que minimizam o custo total. Os autores determinam, em primeiro lugar, a probabilidade da estação de trabalho ficar vazia (nenhuma máquina a trabalhar; todas em reparação ou na fila) e, a partir desta, deduzem a perda de produção. Para além do custo de perda de produção, a função custo também incluí:

- o custo de posse das unidades de reserva;
- o custo de possuir um determinado número de servidores;
- o investimento feito para melhorar as aptidões dos servidores e para desenvolver novas técnicas que permitem realizar as tarefas de reparação com maior rapidez.

O algoritmo desenvolvido para determinar os parâmetros do sistema baseia-se na convexidade da função custo, que foi previamente verificada.

Shankar & Sahani (2003) consideram que as unidades avariam segundo uma distribuição de Weibull e, sempre que a avaria ocorre, a unidade avariada é substituída e enviada para o centro de reparação. O tempo de reparação segue uma distribuição Exponencial Negativa. As unidades sujeitas a falhas de desgaste são substituídas e submetidas a manutenções preventivas que se distribuem segundo uma distribuição de Weibull. O parâmetro de posição da distribuição de Weibull é considerado diferente de zero, uma vez que a fase de desgaste se inicia depois de decorrido um determinado período de tempo. Shankar & Sahani (2003) consideram que as manutenções preventivas têm durações distribuídas segundo uma distribuição Exponencial Negativa e que tanto as revisões como as reparações são perfeitas. O artigo apresenta um método para encontrar o número de unidades n necessárias para garantir um determinado número de

equipamentos em funcionamento. As unidades n são as unidades existentes no sistema para além das unidades em operação e incluem as unidades de reserva, as unidades em reparação e revisão, e as unidades à espera de qualquer um destes serviços. As unidades em operação são substituídas nos instantes t_1, t_2,..., t_i, tempos que seguem uma distribuição de probabilidade mista, composta pela distribuição de probabilidade das avarias e pela distribuição de probabilidade das manutenções preventivas. O número de unidades n no sistema é determinado de tal forma que o instante de tempo t_n (instante da renovação n) coincida com a finalização da primeira manutenção seja ela uma reparação ou uma manutenção preventiva (t_1+ tempo médio para reparar ou realizar uma manutenção preventiva). A probabilidade de falha para o instante t_n é encontrada e o número de unidades n é calculado multiplicando a probabilidade de falha do sistema pelo número de unidades em operação.

3.6. Sistemas de Inventário Multi-escalão de Itens de Reserva

Os sistemas de inventário multi-escalão são sistemas semelhantes aos *float systems*. Um sistema de inventário multi-escalão implica a existência de uma hierarquia de localizações de inventários com pelo menos dois níveis. No nível mais baixo encontram-se as bases, no nível mais elevado encontra-se pelo menos um depósito (Perlman, Mehrez, et al. (2001)).

Quando um item em utilização avaria, ele é levado para a base à qual está associado, é substituído por outro item retirado do armazém da base, se existirem itens disponíveis, e enviado para o depósito, onde é reparado. Depois de reparado, o item é enviado para a base, ficando disponível para substituir, por sua vez, outro item avariado quando solicitado.

O objectivo principal na gestão de uma estrutura de inventário deste tipo consiste na determinação do número de artigos a manter em

armazém quer na base quer no depósito, de modo a atingir determinada medida de desempenho do sistema, satisfazendo condicionantes de ordem económica, política ou estrutural da organização.

As variações deste sistema incluem reparações em ambos os escalões (nas bases e no depósito), a existência de mais do que dois escalões, a troca de itens entre as bases e a falha completa dos itens (avarias não reparáveis).

O modelo dominante na literatura e nas aplicações práticas para itens reparáveis em estrutura multi-escalão é METRIC (*Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control*), desenvolvido por Sherbrooke (1968) e utilizado intensivamente no mundo militar. O METRIC assume que a capacidade do centro de reparação é ilimitada e que a população de onde são geradas as avarias é de tal forma grande que pode ser considerada infinita. Sob estas condições, a quantidade procurada é idêntica ao nível de ocupação de uma fila de espera do tipo $M/G/\infty$. O número de artigos a armazenar, quer no depósito quer nas bases, é determinado por Sherbrooke ajustando o número de unidades existentes no centro de reparação a uma distribuição de Poisson. A partir desta distribuição, Sherbrooke define a expressão do número de itens solicitados ao depósito que, por falta de unidades disponíveis, ainda não foram entregues. Este número é designado na literatura anglo-sáxonica por *Backorders*. A distribuição do número de artigos a armazenar também permite obter uma medida de operacionalidade do sistema que é definida como a percentagem média de unidades que não estão á espera de componentes para serem reparadas. Sherbrooke provou que esta medida de operacionalidade toma o valor máximo quando o número de *Backorders* toma o valor mínimo.

Ao longo dos anos, algumas das restrições do modelo METRIC original foram relaxadas. Enquanto que os pressupostos relativos a uma população de unidades infinita e a uma capacidade de reparação ilimitada podem ser justificados nas aplicações militares, eles são

menos apropriados num ambiente com limitação de recursos tal como acontece na maioria das instalações industriais.

Segundo Díaz & Fu (1997), Os modelos como o METRIC tem um bom nível de desempenho quando a utilização do dispositivo de reparação é relativamente baixo. Para utilizações mais frequentes, o modelo subestima o valor esperado e a variância do número de itens em reparação no depósito e ignora os efeitos da fila de espera. A utilização da distribuição de Poisson obriga a que a variância seja igual a média. Baseados no modelo METRIC, Díaz & Fu (1997) introduzem modelos analíticos, exactos e aproximados, que relaxam a suposição da capacidade de reparação ilimitada. No primeiro modelo proposto, os autores assumem capacidade de reparação limitada, em que o tempo entre chegadas e o tempo de reparação seguem distribuições Exponenciais Negativas. No segundo modelo, os autores utilizam uma distribuição geral para modelar os tempos de reparação, relaxando assim a suposição da distribuição Exponencial Negativa. No terceiro modelo, os autores adaptam o modelo anterior de forma a permitir a existência de diferentes classes de unidades no sistema, com diferentes distribuições de reparação.

Em 2001, Perlman et al. (Perlman, Mehrez, et al. (2001)) consideram um sistema de inventário multi-escalão em que as bases podem optar por dois modos de reparação: o modo normal e o modo rápido. Quando uma falha ocorre, a base envia o item em falha para o depósito onde será reparado e escolhe um dos modos de reparação. Perlman, Mehrez, et al. (2001) apresentam três modelos distintos para encontrar a política de reparação dos sistemas que maximiza a utilidade da organização. O primeiro modelo não considera as condicionantes externas, isto é, não considera o tempo de espera que é eventualmente imposto às bases devido à partilha do mesmo modo de reparação. O segundo modelo já toma em consideração o congestionamento no depósito devido à limitação da capacidade do modo de reparação. O terceiro e último modelo mede o desempenho

marginal, isto é, o efeito que cada base provoca nas restantes devido à utilização do modo rápido de reparação. A medida de desempenho utilizada é o número esperado de pedidos pendentes (*backorders*). A política de reparação baseia-se na distribuição de Bernoulli para atribuir os itens em falha a cada modo de reparação. A procura no modo normal e rápido de reparação são tratados como dois processos de Poisson independentes. Os autores concluíram que a política de reparação que considera as condicionantes externas origina melhores medidas de desempenho do que uma política sem condicionantes.

Com base no artigo de Díaz & Fu (1997), Cunha, Lopes, et al. (2001) desenvolvem um modelo de simulação para um sistema de gestão com dois escalões, uma base e um depósito. Os artigos reparáveis em utilização, em número limitado, avariam segundo uma distribuição Binomial. O centro de reparação tem capacidade limitada e o tempo de reparação segue uma distribuição Exponencial Negativa. Sendo as reparações exclusivamente realizadas no depósito, os autores analisam as duas variáveis aleatórias, número de artigos à espera de transporte para o depósito e número de artigos no centro de reparação, bem como a soma destas duas variáveis.

Kennedy, Patterson, et al. (2002) fazem uma revisão bibliográfica sobre os inventários multi-escalão.

CAP 4. MODELAÇÃO DO SISTEMA

A modelação do sistema passa, em primeiro lugar, pela escolha do processo que descreve a ocorrência de avarias dos equipamentos que integram o sistema e pela modelação do efeito que as intervenções preventivas originam na taxa de avarias dos equipamentos. Em segundo lugar, é feita a construção de diversas equações diferenciais para os estados possíveis do sistema, que permitirão determinar as probabilidades de estado no estado estacionário.

4.1. Notações

Nesta secção listam-se os símbolos utilizados ou introduzidos no capítulo.

M Número de equipamentos em funcionamento na estação de trabalho

R Número de equipamentos de reserva

L Número de equipas de manutenção

T Intervalo de tempo entre revisões

λ Taxa de avarias original de um equipamento (sem recorrer a revisões)

λ_f Taxa de avarias de um equipamento sujeito a revisões periódicas

α Factor de melhoria por aplicação de revisões periódicas

λ_{rev} Frequência de revisões aplicadas a um equipamento

i Número de equipamentos avariados no sistema

j Número de máquinas em condições de ser submetidas a uma operação de manutenção

μ_{rep} Taxa de reparação de uma equipa de manutenção

μ_{rev} Taxa de revisão de uma equipa de manutenção

ε Fracção de unidades que falham enquanto esperam por uma revisão

4.2. A Taxa de Avarias

4.2.1. O Processo de Falha dos Equipamentos Activos

Para o sistema que se pretende analisar composto por equipamentos idênticos, considera-se que as falhas ou avarias dos equipamentos seguem uma Processo Homogéneo de Poisson. A taxa de avarias de cada equipamento é constante e é designada por λ.

Para equipamentos com taxa de avarias decrescente, não faz sentido planear manutenções preventivas enquanto o sistema não atingir o estado estacionário. Esta situação verifica-se geralmente na fase inicial de vida dos equipamentos, em que os componentes com defeito (de concepção ou de conformidade) avariam e são substituídos por componentes sem defeito, ou ainda durante um programa de melhoria.

Para equipamentos com taxa de avarias crescente, o número óptimo de equipamentos de reserva, o número óptimo de equipas de manutenção e o intervalo óptimo entre revisões é variável. Pensa-se que antes de actuar na consequência do problema, minimizando o seu efeito na disponibilidade e nos custos de manutenção através do aumento do número de equipamentos de reserva e de equipas de manutenção e da redução do intervalo entre revisões, deve-se actuar na sua causa, procurando estabilizar a taxa de avarias. Depois, através

das acções de manutenção periódicas e do controlo das condições de operação do equipamento, evitar-se-á que a taxa de avarias volte a crescer. As revisões periódicas permitem manter controladas as avarias originadas por causas associadas ao desgaste.

4.2.2. Melhoria Originada na Taxa de Avarias devido à Realização de Revisões Periódicas

A melhoria originada na taxa de avarias do equipamento surge pelo facto das revisões serem realizadas periodicamente. As intervenções sucessivas no equipamento permitem evitar a ocorrência de uma parte das avarias, o que faz baixar o valor da taxa. A melhoria não tem origem numa intervenção individual realizada no equipamento, mas numa sequência de intervenções em intervalos constantes. Não se considera uma condição do tipo *as good as new* para o equipamento submetido à revisão, mas uma condição do tipo *as bad as old*.

A passagem de uma taxa de avarias para outra não se faz de uma forma instantânea. Para um sistema no estado estacionário, um período de transição em que a taxa de avarias diminui, inicia-se quando se realizam as primeiras revisões; após algum tempo, o sistema volta a estabilizar e a taxa de avarias permanece novamente constante (com um valor inferior ao valor inicial).

A melhoria originada é proporcional à duração do intervalo de tempo entre revisões (T) e é tanto maior quanto menor for o intervalo.

Optou-se por representar a melhoria por um factor designado por α (dependente de T) cujo valor varia no intervalo [0; 1[. O factor α não pode tomar o valor 1 para não permitir que a taxa de avarias após revisão seja zero. Devido à complexidade dos sistemas, pensa-se que, por mais numerosas que sejam as intervenções preventivas, não é possível obter uma taxa de avarias igual a zero, pelo menos apenas através da redução do intervalo entre revisões.

Considerando uma taxa de avarias original (λ), a taxa de avarias resultante da aplicação de revisões periódicas (λ_f) é dada pela seguinte expressão:

$$\lambda_f = \lambda - \alpha.\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda_f = (1-\alpha).\lambda \qquad (4.1)$$

As revisões são apenas realizadas aos equipamentos que atingem o final do intervalo T sem avarias. A percentagem de falhas que se evitam é equivalente à percentagem de equipamentos que atingem o final do intervalo T.

Por exemplo, para evitar 40% (α =0.4) das falhas, o intervalo entre revisões deverá obedecer à seguinte relação: $0.4 = \exp(-\lambda.T)$.

Sendo assim, α e λ_f podem ser obtidos respectivamente pelas expressões seguintes:

$$\alpha = \exp(-\lambda.T) \qquad (4.2)$$

$$\lambda_f = (1-\exp(-\lambda.T)).\lambda \qquad (4.3)$$

Segundo a expressão de λ_f, quando T tende para infinito (manutenções preventivas inexistentes) λ_f tende para λ e quando T tende para 0 (manutenções muito frequentes) λ_f tende para 0. Esta relação implica que a taxa de avarias só é nula se as revisões forem realizadas continuamente (T=0), o que é naturalmente incomportável e permite representar matematicamente a realidade anteriormente descrita.

A frequência de revisões de um equipamento (λ_{rev}) poderá ser obtida através da seguinte relação:

$$\lambda_f + \lambda_{rev} = \lambda \qquad (4.4)$$

4.3. Probabilidades de Estado

4.3.1. Introdução

As probabilidades de estado para um sistema com capacidade de manutenção ilimitada é facilmente obtida através de equações diferenciais. Apresenta-se o exemplo de um sistema com duas máquinas activas e uma máquina de reserva, para o qual é construído o diagrama de estados e respectivas equações diferenciais.

Cada estado é definido e representado pelo par (i,j) em que i representa o número de máquinas avariadas e j representa o número de máquinas em condições de ser submetidas a uma operação de manutenção preventiva. μ_{rep} e μ_{rev} representam respectivamente a taxa de reparação e a taxa de revisão de uma equipa de manutenção.
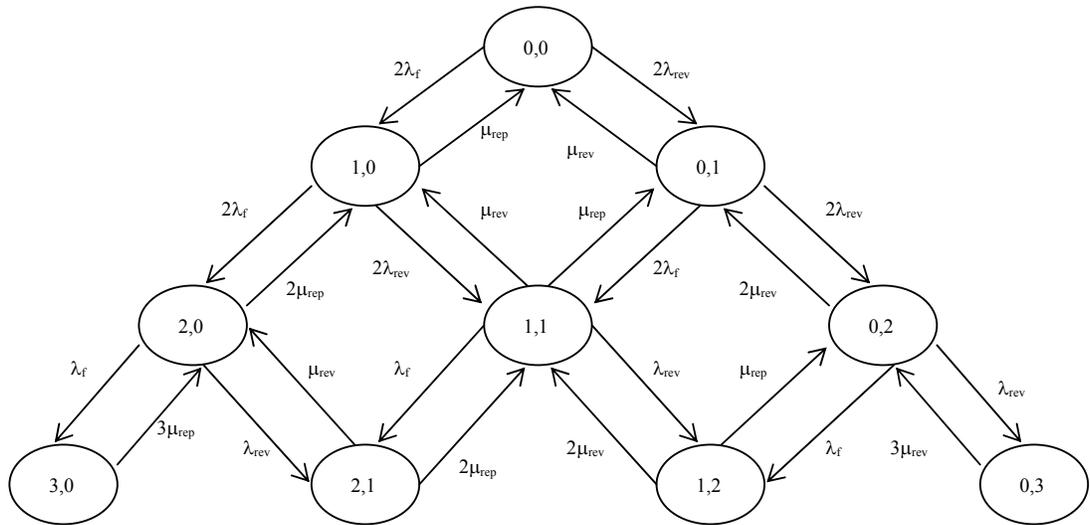
Figura 12: Diagrama de estado de um sistema com M=2 e R=1

$P'_{0,0}(t) = -2\,(\lambda_f + \lambda_{rev}).\, P_{0,0}(t) + \mu_{rep}.\, P_{1,0}(t) + \mu_{rev}.\, P_{0,1}(t)$

$P'_{1,0}(t) = [-2\,(\lambda_f + \lambda_{rev}) - \mu_{rep}].\, P_{1,0}(t) + 2\,\lambda_f.\, P_{0,0}(t) + 2\mu_{rep}.\, P_{2,0}(t) + \mu_{rev}.\, P_{1,1}(t)$

$P'_{0,1}(t) = [-2\,(\lambda_f + \lambda_{rev}) - \mu_{rev}].\, P_{0,1}(t) + 2\,\lambda_{rev}.\, P_{0,0}(t) + \mu_{rep}.\, P_{1,1}(t) + 2\,\mu_{rev}.\, P_{0,2}(t)$

$P'_{2,0}(t) = [- (\lambda_f + \lambda_{rev}) - 2\mu_{rep}].\ P_{2,0}(t) + 2\ \lambda_f\ P_{1,0}(t) + 3\ \mu_{rep.}\ P_{3,0}(t) + \mu_{rev.}\ P_{2,1}(t)$

$P'_{1,1}(t) = [- (\lambda_f + \lambda_{rev}) - \mu_{rep} - \mu_{rev}].\ P_{1,1}(t) + 2\ \lambda_f\ P_{0,1}(t) + 2\ \lambda_{rev}\ P_{1,0}(t) + 2\ \mu_{rep}\ P_{2,1}(t) + 2\ \mu_{rev}\ P_{1,2}(t)$

$P'_{0,2}(t) = [- (\lambda_f + \lambda_{rev}) - 2\ \mu_{rev}].\ P_{0,2}(t) + 2\ \lambda_{rev.}\ P_{0,1}(t) + \mu_{rep.}\ P_{1,2}(t) + 3\ \mu_{rev.}\ P_{0,3}(t)$

$P'_{3,0}(t) = - 3\ \mu_{rep.}\ P_{3,0}(t) + \lambda_{f.}\ P_{2,0}(t)$

$P'_{2,1}(t) = - (2\ \mu_{rep} + \mu_{rev}).\ P_{2,1}(t) + \lambda_{rev.}\ P_{2,0}(t) + \lambda_{f.}\ P_{1,1}(t)$

$P'_{1,2}(t) = - (\mu_{rep} + 2\mu_{rev}).\ P_{1,2}(t) + \lambda_{rev.}\ P_{1,1}(t) + \lambda_{f.}\ P_{0,2}(t)$

$P'_{0,3}(t) = - 3\ \mu_{rev}.\ P_{0,3}(t) + \lambda_{rev.}\ P_{0,2}(t)$

As equações gerais para M máquinas activas e R máquinas de reserva são as seguintes:

Para $(i + j \leq R)$

$P'_{i,j}(t) = [- M.(\lambda_f + \lambda_{rev}) - i.\mu_{rep} - j.\mu_{rev}].\ P_{i,j}(t) + M.\ \lambda_f\ .P_{i-1,j}(t) + M.\ \lambda_{rev}\ .P_{i,j-1}(t) + (i + 1).\mu_{rep.}\ P_{i+1,j}(t) + (j + 1).\mu_{rev.}\ P_{i,j+1}(t)$

Para $(i + j > R)$

$P'_{i,j}(t) = [- (M - i - j + R).(\lambda_f + \lambda_{rev}) - i.\mu_{rep} - j.\mu_{rev}].\ P_{i,j}(t) + (M - i - j + R + 1)\ .\lambda_f\ .P_{i-1,j}(t) + (M - i - j + R + 1)\ .\lambda_{rev}\ .P_{i,j-1}(t) + (i + 1).\mu_{rep.}\ P_{i+1,j}(t) + (j + 1).\mu_{rev.}\ P_{i,j+1}(t)$

As equações acima foram desenvolvidas com base na suposição de que não existe limitação nos recursos humanos de manutenção, quer para proceder às reparações dos equipamentos, quer para realizar as revisões periódicas. Supõe-se ainda que os materiais e peças estão disponíveis quando requeridos.

A figura 13 apresenta um exemplo com 4 máquinas activas e 2 máquinas de reserva. Como se pode observar, o número de máquinas com necessidade de manutenção (reparação e revisão) ultrapassa o

número de máquinas de reserva, a partir do instante em que a máquina 2 completa um período de duração T em funcionamento sem avarias. A primeira máquina de reserva foi utilizada para substituir a máquina 3, cuja actividade foi interrompida devido a uma avaria e a segunda máquina foi utilizada para substituir a máquina 4 pelo mesmo motivo.
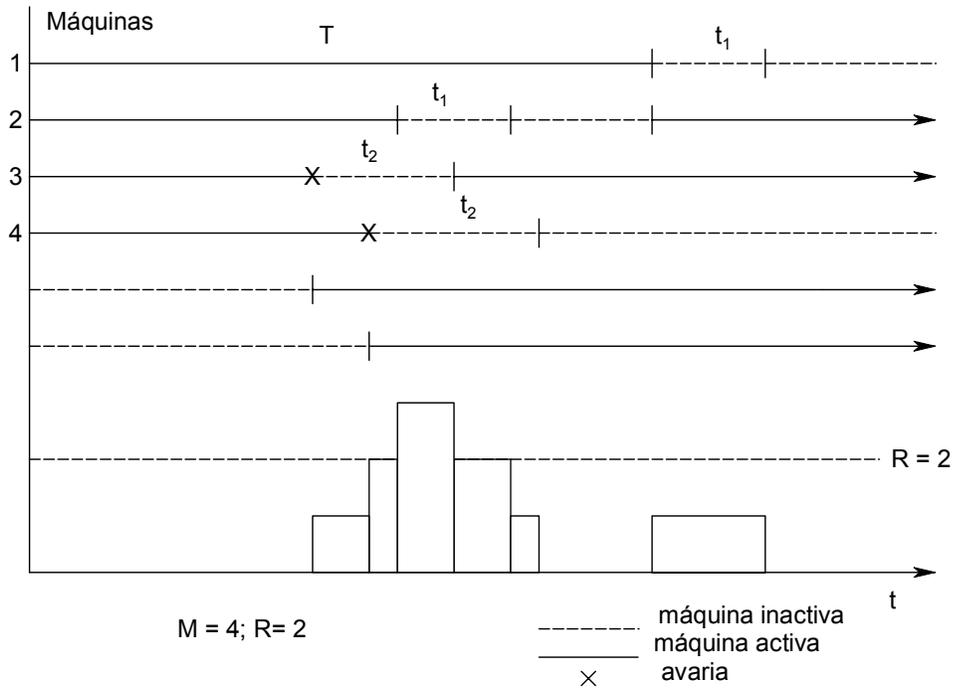
Figura 13: Sistema com duas máquinas de reserva e capacidade de manutenção ilimitada

Relaxando a hipótese da capacidade de manutenção ser ilimitada, uma solução pode ser facilmente obtida se considerarmos que as reparações e as revisões são executadas por equipas distintas.

Considerando L_{rep} como sendo o número total de reparações possíveis de ser realizadas em simultâneo (ou capacidade máxima de reparação do centro de manutenção) e L_{rev}, o número máximo de revisões (ou capacidade máxima de revisão), as equações diferenciais apresentadas anteriormente alteram-se, dando origem às seguintes (as alterações estão indicadas em relevo):

Para $(i + j \leq R)$

$P'_{i,j}(t) = [- M.(\lambda_f + \lambda_{rev}) - \mathbf{min(i; L_{rep})}.\mu_{rep} - \mathbf{min(j; L_{rev})}.\mu_{rev}]. P_{i,j}(t) + M. \lambda_f .P_{i-1,j}(t) + M. \lambda_{rev} .P_{i,j-1}(t) + \mathbf{min(i+1; L_{rep})}.\mu_{rep} P_{i+1,j}(t) + \mathbf{min(j+1; L_{rev})}.\mu_{rev} P_{i,j+1}(t)$

Para $(i + j > R)$

$P'_{i,j}(t) = [- (M - i - j + R).(\lambda_f + \lambda_{rev}) - \mathbf{min(i; L_{rep})}.\mu_{rep} - \mathbf{min(j; L_{rev})}.\mu_{rev}]. P_{i,j}(t) + (M - i - j + R + 1).\lambda_f .P_{i-1,j}(t) + (M - i - j + R + 1).\lambda_{rev} .P_{i,j-1}(t) + \mathbf{min(i+1; L_{rep})}.\mu_{rep} P_{i+1,j}(t) + \mathbf{min(j+1; L_{rev})}.\mu_{rev} P_{i,j+1}(t)$

No entanto, esta hipótese continua a não ser muito realista. No caso da partilha dos recursos humanos de manutenção (reparações e revisões realizadas indiscriminadamente por qualquer equipa de manutenção), é necessário definir um critério para a sequenciação das operações de manutenção e para a substituição das máquinas avariadas e com necessidade de revisão.

4.3.2. Suposições

Para um sistema com R equipamentos de reserva e L equipas de manutenção, se o número de equipamentos de reserva for superior à capacidade de manutenção ($L<R$), pode ocorrer a formação de uma fila de espera e não ocorrer perda de produção. No caso contrário ($R\leq L$) pode existir perda de produção com utilização parcial da capacidade de manutenção. Os dois casos assim definidos são distintos e, por essa razão, passarão a ser tratados separadamente.

No entanto, para ambos os casos considera-se que, quando o número total de equipamentos inactivos devido à necessidade de reparação ou revisão é igual ou superior a L, a revisão de um equipamento é adiada (o equipamento continua activo) até que uma equipa de manutenção esteja disponível. Esta condição permite que se evite incorrer em perda de produção devido à espera da realização de uma revisão ou que se ocupe um equipamento de reserva que poderá ser

posteriormente necessário para a substituição de um equipamento avariado.

A representação desta suposição é ilustrada pela figura 14, onde se considera que existem 2 equipas de manutenção disponíveis no sistema. Comparando o sistema da figura 14 com o da figura 13, podemos observar que: enquanto na figura 13 existe uma máquina em falta num determinado instante de tempo, na figura 14 não se verifica qualquer máquina em falta para o mesmo intervalo de tempo. A máquina 2 não é retirada de serviço no instante em que completa um período de duração T em funcionamento sem avarias, mas apenas quando é terminada a reparação da máquina 3.
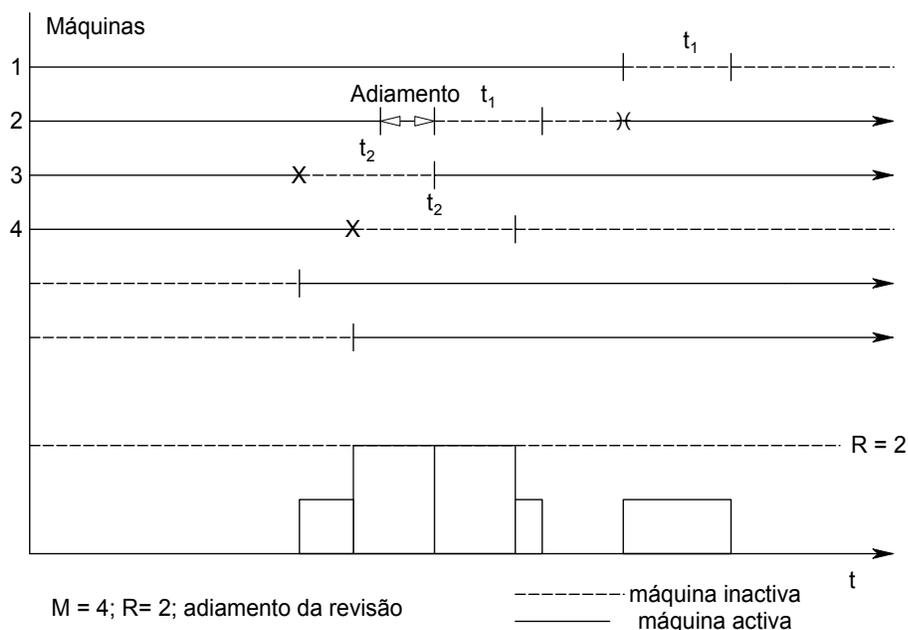
Figura 14: Adiamento da revisão

Considera-se ainda que a ordem de atendimento segue uma disciplina FIFO (*First In, First Out*). Os equipamentos que avariam são retirados da estação de trabalho e enviados para a fila de espera onde serão atendidos pela ordem de chegada. Os equipamentos que, mesmo após terem atingido o instante pré-definido para se proceder a uma revisão, são mantidos activos, marcam a sua posição na fila de espera logo que

completam um período de duração T em funcionamento sem avarias (apesar de não permanecerem fisicamente na fila).

Uma vez que a ordem de atendimento segue a disciplina FIFO, assume-se que, para i+j>L, a taxa média de manutenção é dada por:

$$\mu = L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} + L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev} \quad (4.5)$$

em que $\frac{\lambda_f}{\lambda}$ é a fracção de equipamentos em reparação e $\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}$, é a fracção de equipamentos em revisão.
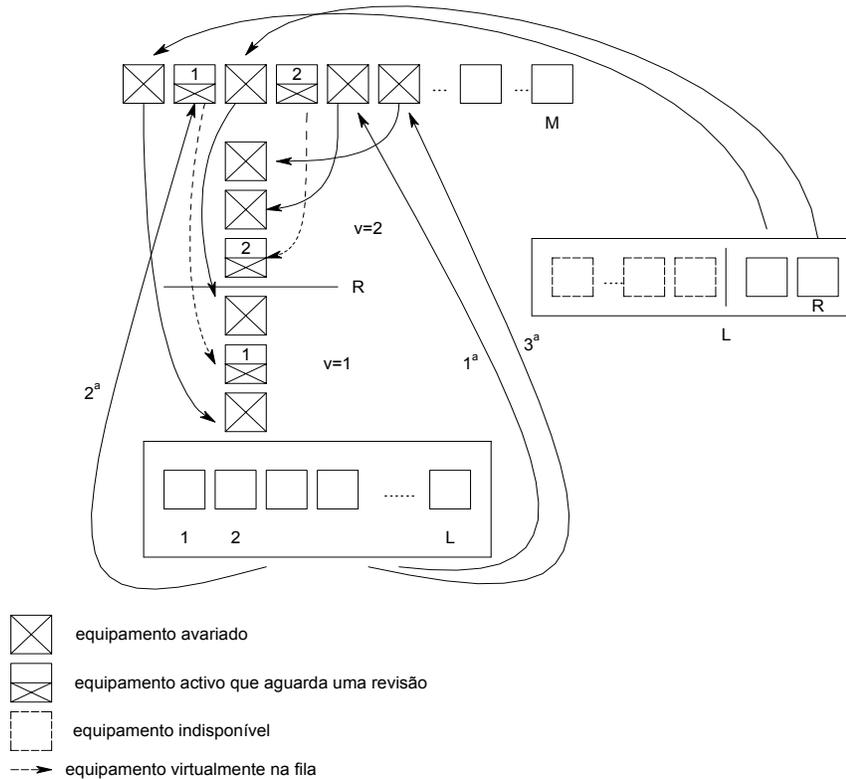
Figura 15: representação do sistema para L<R

A figura 15 exemplifica o processo de substituição dos equipamentos avariados e dos equipamentos com necessidade de revisão para L<R.

Para $i+j \leq L$, os equipamentos são substituídos e atendidos pela ordem de chegada.

Quando $i+j>L$, os equipamentos avariados formam uma fila de espera e são substituídos na estação de trabalho por equipamentos de reserva, enquanto houver equipamentos de reserva disponíveis. Os equipamentos que completam um período de duração T em funcionamento sem avarias, são mantidos activos na estação de trabalho, onde esperam para ser atendidos, e são substituídos quando são retirados da estação de trabalho para ser submetidos à intervenção preventiva. A sua substituição é assegurada pelo equipamento que sai do centro de manutenção no instante imediatamente anterior.

Se ocorrer a falha de um equipamento activo que aguarda pela realização de uma revisão, este será substituído imediatamente, se existir um equipamento de reserva disponível ou logo que fique disponível.

A figura 16 representa o sistema para $R \leq L$. Quando $R<i+j<L$, todos os equipamentos avariados e com necessidade de revisão são atendidos imediatamente. Nestes estados, a evolução do sistema é imprevisível. O sistema pode evoluir para um estado em que os equipamentos de reserva estão disponíveis ou para um estado em que nem estão disponíveis os equipamentos de reserva, nem as equipas de manutenção. Sendo assim, considera-se preferível iniciar a revisão de um equipamento, mesmo não sendo possível substituí-lo.

Para $i+j>L$, os equipamentos avariados aguardam numa fila de espera. Os equipamentos com necessidade de revisão, aguardam activos à espera de ser atendidos.

Nota-se que, neste caso ($R \leq L$), tal como a ordem de atendimento, a ordem de substituição segue a disciplina FIFO.
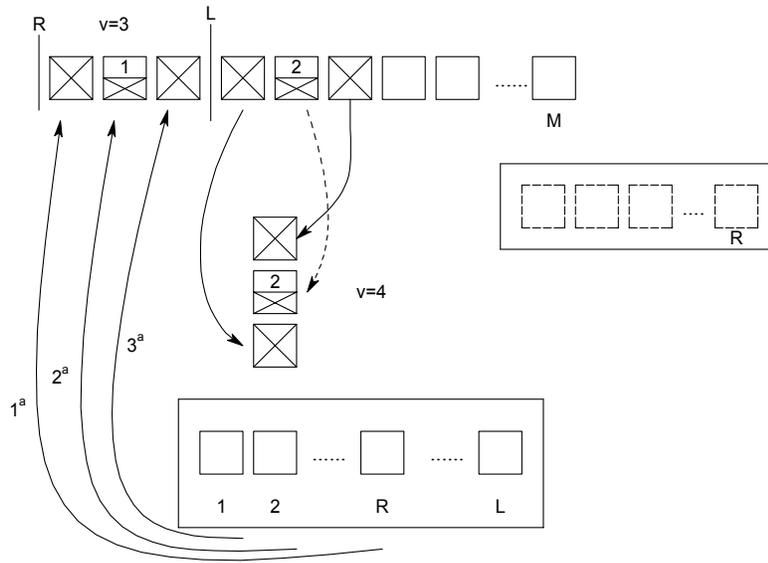
Figura 16: Representação do sistema para R ≤ L

4.3.3. As Equações Diferenciais

A figura 17 apresenta o diagrama de estados do sistema em estudo.
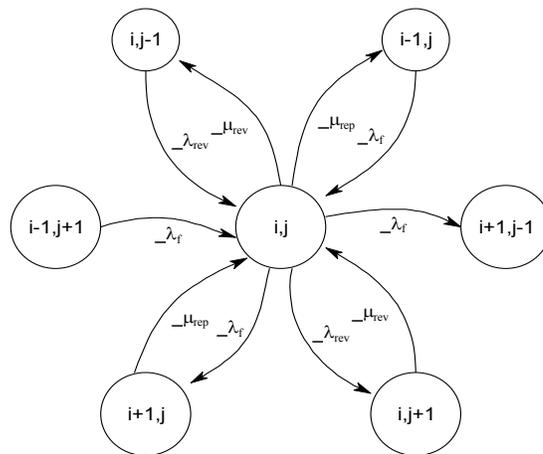
Figura 17: Diagrama de Estados

De forma a definir as probabilidades para todos os estados possíveis do sistema, têm de ser consideradas as seguintes situações distintas (designou-se por v as diferentes combinações de L, R e i+j):

$v=0 \quad \rightarrow \quad i+j \leq R \;\wedge\; i+j \leq L$

v=1 → $L<i+j\leq R$

v=2 → $L<R \wedge i+j>R$

v=3 → $R<i+j\leq L$

v=4 → $R\leq L \wedge i+j>L$

As equações diferenciais para cada uma das situações foram desenvolvidas para permitir determinar, posteriormente, as probabilidades de estado.

No estado estacionário, $P'_{i,j}(t)=0$ e $\sum_{i,j} P_{i,j} = 1$.

❖ **v=0 (i+j ≤ R ∧ i+j ≤ L)**

Nesta situação, existem equipamentos de reserva suficientes para substituir todas os equipamentos avariados e com necessidade de revisão. Existem também equipas de manutenção suficientes para iniciar imediatamente todas as operações de manutenção.

Para i+j=L, se uma falha ocorrer antes da finalização de uma reparação ou revisão, a reparação não poderá ser iniciada imediatamente, mas o equipamento será substituído se i+j<R. Da mesma forma, se um equipamento completa um período de duração T em funcionamento sem avarias, a revisão não poderá ser iniciada imediatamente e o equipamento continuará em funcionamento até que uma operação de manutenção seja concluída no centro de manutenção.

$$
\begin{aligned}
P'_{i,j}(t) = {} & [- M.(\lambda_f + \lambda_{rev}) - i.\mu_{rep} - j.\mu_{rev}] && && .P_{i,j}(t) \\
& + M.\ \lambda_f && && .P_{i-1,j}(t) \\
& + M.\ \lambda_{rev} && && .P_{i,j-1}(t) \\
& + (i+1).\ \mu_{rep} && .\beta && .P_{i+1,j}(t)^* \\
& + L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\ \mu_{rep} && .(1-\beta) && .P_{i+1,j}(t)^* \\
& + (j+1).\ \mu_{rev} && .\beta && .P_{i,j+1}(t)^{**} \\
& + L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\ \mu_{rev} && .(1-\beta) && .P_{i,j+1}(t)^{**}
\end{aligned}
$$

$$\begin{Bmatrix} \beta = 1 & para & i + j < L \\ \beta = 0 & para & i + j = L \end{Bmatrix}$$

*O número de equipamentos em reparação será i+1, se uma equipa de manutenção está disponível (i+j<L ou i+j+1≤L). Caso contrário (i+j=L ou i+j+1>L), o número de equipamentos em reparação será calculado como na situação v=1, apresentada a seguir.

** O número de equipamentos em revisão será j+1, se uma equipa de manutenção está disponível (i+j<L ou i+j+1≤L). Caso contrário (i+j=L ou i+j+1>L), o número de equipamentos em revisão será calculado como na situação v=1, apresentada a seguir.

❖ **v=1 (L<i+j≤R)**

Neste caso, as equipas de manutenção estão todas ocupadas e não podem iniciar nenhuma operação de manutenção imediatamente; forma-se uma fila de espera (ver figura 15).

Os equipamentos com necessidade de revisão continuam activos até serem atendidos para evitar a utilização de um equipamento de reserva. Desta forma, a possibilidade de falha dos equipamentos que aguardam activos pela realização da revisão tem de ser considerada. Sendo assim, o sistema pode passar para o estado (i,j) quando está no estado (i-1, j+1) devido à falha de um equipamento que aguarda activo pela realização da revisão.

O comprimento da fila de espera é dado por (i+j-L) e o número médio de equipamentos activos à espera de uma revisão é

$$(i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}, \qquad (4.6)$$

que corresponde à média da distribuição Binomial.

Como pode ser observado na equação diferencial a seguir, quando o sistema está no estado (i-1,j), o número de equipamentos que podem avariar é dado por

$$M\text{-}(i\text{-}1+j\text{-}L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}, \qquad (4.7)$$

em que $(i\text{-}1+j\text{-}L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}$ é o número médio de equipamentos que aguardam activos pela realização da revisão cujas falhas implicam uma mudança do estado (i-1,j) para o estado (i,j-1) e não para o estado (i,j).

$$P'_{i,j}(t) = [- M.\lambda_f - \{M\text{-}(i+j\text{-}L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}\}.\lambda_{rev} - L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} - L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev}].P_{i,j}(t)$$

$$+ \{M\text{-}(i\text{-}1+j\text{-}L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}\}.\lambda_f \qquad .P_{i\text{-}1,j}(t)$$

$$+ \{M\text{-}(i+j\text{-}1\text{-}L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}\}.\lambda_{rev} \qquad .P_{i,j\text{-}1}(t)$$

$$+ L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} \qquad .P_{i+1,j}(t)$$

$$+ L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev} \qquad .P_{i,j+1}(t)$$

$$+ \{(i+j\text{-}L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}\}.\lambda_f \qquad .P_{i\text{-}1,j+1}(t)$$

❖ **v=2 $(L<R \wedge i+j>R)$**

As equipas de manutenção estão todas ocupadas e nenhum equipamento de reserva está disponível (ver figura 15). Os equipamentos que avariam, aguardam na fila de espera; os equipamentos que atingem o final do intervalo de revisão sem avarias, mantêm-se em funcionamento, mas marcam a sua vez na fila de espera.

O número de equipamentos activos é dado por

$$M\text{-} Max[0, (i+j\text{-}L).\frac{\lambda_f}{\lambda}\text{-}(R\text{-}L)], \qquad (4.8)$$

onde (i+j-L). $\frac{\lambda_f}{\lambda}$ representa o número de equipamentos avariados na fila de espera e (R-L) representa o número de equipamentos na fila que já foram substituídos.

Se o número de equipamentos avariados na fila de espera é superior ao número de equipamentos de reserva disponíveis quando as equipas de manutenção ficam todas ocupadas (R-L), então o número de equipamentos em falta na estação de trabalho será

$$(i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda}-(R-L). \qquad (4.9)$$

No caso contrário, o número de equipamentos em falta será 0. Sendo assim, no estado (i-1,j), o número de equipamentos que podem falhar é dado por

$$\{M- Max[0, (i-1+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda}-(R-L)]- (i-1+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}\}, \qquad (4.10)$$

onde (i-1+j-L).$\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}$ representa o número médio de equipamentos à espera de uma revisão e cujas falhas implicam a passagem para o estado (i,j-1) e não para o estado (i,j).

$$\begin{aligned}
P'_{i,j}(t) = [-\{M- Max[0, (i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda}-(R-L)]\}.\lambda_f - \{ M- Max[0, (i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda}-(R-\\
L)]-(i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}\}.\lambda_{rev} - L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} - L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev}] \quad & .P_{i,j}(t)\\
+ \{ M- Max[0, (i-1+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda}-(R-L)]-(i-1+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}\}. \lambda_f \quad & .P_{i-1,j}(t)\\
+ \{ M- Max[0, (i+j-1-L).\frac{\lambda_f}{\lambda}-(R-L)]-(i+j-1-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}\}. \lambda_{rev} \quad & .P_{i,j-1}(t)\\
+ L.\frac{\lambda_f}{\lambda}. \mu_{rep} \quad & .P_{i+1,j}(t)\\
+ L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}. \mu_{rev} \quad & .P_{i,j+1}(t)
\end{aligned}$$

$+ \{(i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}\}.\ \lambda_f$ $\quad .P_{i-1,j+1}(t)$

❖ **v=3 (R<i+j≤L)**

Neste caso, os equipamentos de reserva não são suficientes para substituir todos os equipamentos que necessitam de uma reparação ou de uma revisão (ver figura 16). Uma vez que nem os equipamentos avariados nem os equipamentos com necessidade de revisão podem ser substituídos, o número de equipamentos em falta na estação de trabalho é

$$(i+j-R) \tag{4.11}$$

A equação diferencial resultante é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
P'_{i,j}(t) = & [- \{ M- (i+j-R) \} .(\lambda_f + \lambda_{rev}) - i.\ \mu_{rep} - j.\mu_{rev}] && .P_{i,j}(t) \\
& + \{M- (i-1+j-R)\}.\ \lambda_f && .P_{i-1,j}(t) \\
& + \{M- (i+j-1-R)\}.\ \lambda_{rev} && .P_{i,j-1}(t) \\
& + \{i+1\}.\ \mu_{rep}\ .\beta && .P_{i+1,j}(t)^* \\
& + L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\ \mu_{rep}\ .(1-\beta) && .P_{i+1,j}(t)^* \\
& + \{j+1\}.\ \mu_{rev}\ .\beta && .P_{i,j+1}(t)^{**} \\
& + L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\ \mu_{rev}\ .(1-\beta) && .P_{i,j+1}(t)^{**}
\end{aligned}
$$

❖ **v=4 (R ≤ L ∧ i+j>L)**

Esta situação ocorre depois de ocorrer a situação 3 e quando o número de equipamentos com necessidade de manutenção (reparação ou revisão) ultrapassa o número de equipas de manutenção (ver figura 16).

Uma fila de espera começa a formar-se logo que o número de equipamentos com necessidade de manutenção ultrapassa o número de equipas de manutenção.

O número de equipamentos em falta na estação de trabalho é dado por

$$(i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda}+(L-R), \qquad (4.12)$$

onde $(i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda}$ é o número de equipamentos avariados na fila de espera e (L-R) representa o número de equipamentos que foram atendidos mas não substituídos ($R \leq L$).

$$
\begin{aligned}
P'_{i,j}(t) = {} & [- \{M-(i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} - (L-R)\}.\lambda_f - \{M-(i+j-R)\}.\lambda_{rev} - L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} - \\
& L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev}] && .P_{i,j}(t) \\
& + \{M-(i-1+j-R)\}.\lambda_f && .P_{i-1,j}(t) \\
& + \{M-(i+j-1-R)\}.\lambda_{rev} && .P_{i,j-1}(t) \\
& + L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} && .P_{i+1,j}(t) \\
& + L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev} && .P_{i,j+1}(t) \\
& + \{(i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}\}.\lambda_f && .P_{i-1,j+1}(t)
\end{aligned}
$$

No estado (i-1,j), o número de equipamentos que podem falhar (com excepção dos que aguardam uma revisão) é dado por

$$M-(i-1+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} - (L-R)-(i-1+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda} = M-(i-1+j-R) \qquad (4.13)$$

No estado (i-1,j), o número de equipamentos que podem necessitar de uma revisão (com excepção dos que aguardam uma revisão) é dado por:

$$M-(i+j-1-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} - (L-R)-(i+j-1-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda} = M-(i+j-1-R) \qquad (4.14)$$

4.3.4. Determinação da Fracção de Equipamentos que Avariam quanto Aguardam por uma Revisão.

Nas equações anteriores, supôs-se que a fracção de equipamentos avariados e a fracção de equipamentos que necessitam de revisão no centro de manutenção era dada respectivamente por: $\frac{\lambda_f}{\lambda}$ e $\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}$. No entanto, estas fracções não contemplam a possibilidade da ocorrência de avarias nos equipamentos que foram mantidos activos, apesar de terem atingido o final do intervalo T sem avarias.

Pode-se esperar que a fracção de equipamentos avariados aumente e que a fracção de equipamentos que necessitam de manutenção diminua, tal como mostra a seguinte equação:

$$(\frac{\lambda_f}{\lambda} + \varepsilon) + (\frac{\lambda_{rev}}{\lambda} - \varepsilon) = 1 \qquad (4.15)$$

ε é a fracção de unidades que falham enquanto esperam por uma revisão (ver figura 18 e figura 19).
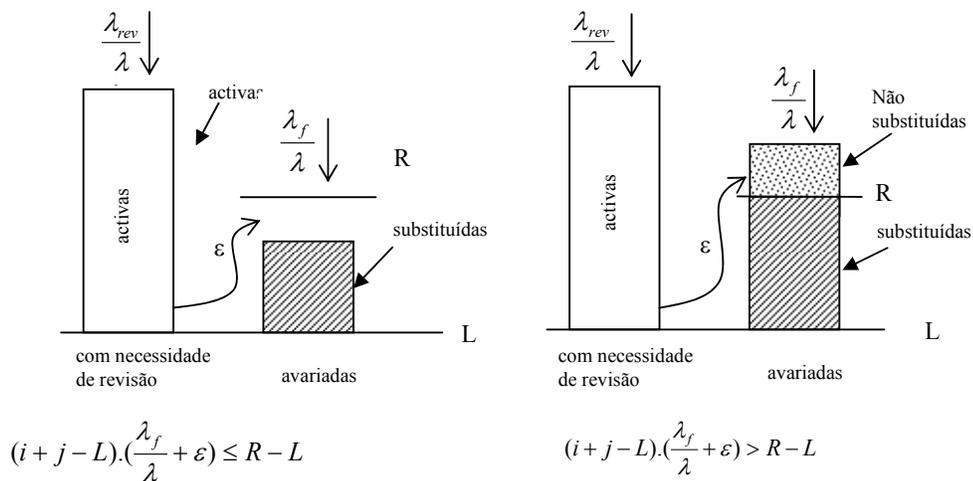
Figura 18: Número de equipamentos avariados e com necessidade de revisão na fila de espera para L<R
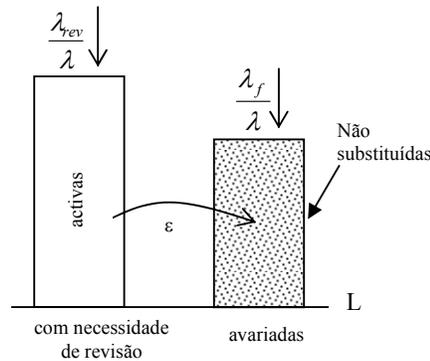
Figura 19: Número de equipamentos avariados e com necessidade de revisão na fila de espera para R≤L

Para determinar a probabilidade de falha de um equipamento que necessita de revisão, é necessário determinar previamente o tempo que esse equipamento permanece na fila de espera virtual. Isto pode ser determinado com a fórmula de Little da teoria das filas de espera.

$$L_q = \lambda_s . w_q$$

$$\Leftrightarrow w_q = \frac{L_q}{\lambda_s} \qquad (4.16)$$

L_q – comprimento médio da fila de espera

λ_s – taxa média de equipamentos que entram na fila de espera

w_q – tempo médio na fila

➢ ***Comprimento da fila***

O comprimento da fila é dado pela diferença entre o número total de equipamentos, no centro de manutenção e na fila virtual, e o número de equipas de manutenção:

$$i+j-L \qquad (4.17)$$

➢ ***Taxa média de entradas de equipamentos na fila de espera***

A taxa de entrada de equipamentos na fila de espera varia com o número de equipamentos activos e inclui a taxa de chegadas de

equipamentos avariados e a taxa de chegada de equipamentos com necessidade de revisão.

A expressão da taxa de entrada é apresentada para cada caso. No caso 3 (R<i+j ≤ L), não se forma fila de espera. Por isso, o tempo médio de espera é zero e os equipamentos com necessidade de revisão são imediatamente atendidos.

Caso v=1

$$\lambda_{s1} = M.\lambda_f + \left[M - (i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda} \right].\lambda_{rev}, \tag{4.18}$$

onde $M.\lambda_f$ representa a taxa média de avarias na estação de trabalho e $\left[M - (i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda} \right].\lambda_{rev}$ representa a taxa média de solicitações de revisão.

Caso v=2

$$\lambda_{s2} = \left[M - Max\left[0; (i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} - (R-L) \right] \right].\lambda_f + \left[M - Max\left[0; (i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} - (R-L) \right] - (i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda} \right].\lambda_{rev}, \tag{4.19}$$

Caso v=3

Neste caso, não se forma fila de espera, uma vez que i+j<L.

Caso v=4

$$\lambda_{s4} = \left[M - (i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} - (L-R) \right].\lambda_f + \left[M - (i+j-R) \right].\lambda_{rev} \tag{4.20}$$

- ***Tempo médio na fila***

Utilizando a fórmula de Little, o tempo médio na fila é dado pela razão entre o comprimento da fila de espera e a taxa de chegadas de equipamentos ao centro de manutenção.

Caso v=1 e v=2 (L< R)

$$w_q = \frac{\sum_{i+j \geq L} (i+j-L).P_{(i,j)}}{\sum_{L \leq i+j \leq R} \lambda_{s1}.P_{(i,j)} + \sum_{i+j>R} \lambda_{s2}.P_{(i,j)}} \tag{4.21}$$

Caso v=4 (R ≤ L)

$$w_q = \frac{\sum_{i+j \geq L} (i+j-L).P_{(i,j)}}{\sum_{i+j \geq L} \lambda_{s4}.P_{(i,j)}} \tag{4.22}$$

O número médio de avarias será dado por

$$\lambda_f w_q \tag{4.23}$$

- ***Fracção de equipamentos que avariam***

Com base em valores médios e assumindo um Processo de Poisson Homogéneo, faz-se uma aproximação à probabilidade de não ocorrerem avarias através da expressão:

$$e^{-\lambda_f w_q} \tag{4.24}$$

Sendo assim, a probabilidade de ocorrer pelo menos uma avaria será dada por:

$$1 - e^{-\lambda_f w_q} \tag{4.25}$$

Obtém-se assim uma aproximação da fracção de equipamentos activos que avariam quando esperam por uma revisão:

$$\varepsilon = (1 - e^{-\lambda_f w_q}).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda} \tag{4.26}$$

Uma vez que ε é calculado com base nas probabilidades de estado, o ajustamento das probabilidades tem de ser calculado iterativamente, até que a diferença entre valores consecutivos de ε ($\Delta\varepsilon$) seja inferior a um critério de convergência especificado.

CAP 5. O CUSTO DE MANUTENÇÃO DO SISTEMA

Embora a decisão sobre o número de equipas de manutenção, sobre o número de equipamentos de reserva e sobre o intervalo entre revisões tenha efeitos em outras medidas relevantes para este tipo de sistemas, a sua importância depende das características especificas do sistema em causa. A análise dos custos de manutenção é indispensável e, para a maioria dos sistemas, é considerada a principal medida de desempenho. Por outro lado, mesmo em situações em que outras medidas de desempenho sejam mais relevantes, um modelo de custos pode sempre ser adaptado. Por exemplo, se por questões de segurança, for imperioso evitar avarias, o modelo de custos associará um custo muito elevado às situações de avarias. Se por outro lado se pretende garantir uma disponibilidade elevada do sistema, o modelo de custos associará um custo elevado à perda de produção do sistema.

Neste capítulo, apresenta-se o modelo de custos que, com base nas probabilidades de estado, determina o custo por unidade de tempo do sistema em análise. Em primeiro lugar, é determinada a expressão da duração do ciclo, que é definido de forma a ser possível contabilizar o tempo durante o qual o sistema não trabalha na sua plena capacidade, ocorrendo perda de produção. Posteriormente, são atribuídos os custos a cada combinação possível de R, L e i+j.

5.1. Notações

Nesta secção listam-se os símbolos utilizados ao longo do capítulo, cujas definições são apresentadas no momento em que são introduzidas no texto.

f(t) Função densidade de probabilidade do tempo de avaria de um equipamento

F(t) Função distribuição de probabilidade do tempo de avaria de um equipamento. $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$

A_R Probabilidade do número de máquinas, avariadas e com necessidade de revisão, ser inferior ao número de máquinas de reserva. $\overline{A}_R = 1 - A_R$

A_L Probabilidade de existir pelo menos uma equipa de manutenção disponível. $\overline{A}_R = 1 - A_R$

P_F Probabilidade de falha de uma máquina activa que espera por uma revisão

P_{NF} Probabilidade de uma máquina activa, que espera por uma revisão, funcionar até se iniciar a revisão (P_{NF} = 1-P_F)

a Fracção de equipamentos avariados

b Fracção de equipamentos com necessidade de revisão

r Número de máquinas não substituídas

τ_{uv} Tempo médio até à substituição de uma máquina

v Índice indicador do estado do sistema relativamente a R e a L. Existem 5 casos possíveis (v=0 para $i+j \leq R \wedge i+j \leq L$; v=1 para $L<(i+j) \leq R$; v=2 para $L<R \wedge i+j>R$; v=3 para $R<i+j \leq L$; v=4 para $R \leq L \wedge i+j>L$)

u Índice indicador do estado da máquina (u=a para uma máquina com necessidade de revisão; u=b para uma máquina avariada)

μ Taxa de manutenção das equipas activas no centro de manutenção

t_v Tempo médio até à falha de uma máquina activa com necessidade de revisão

z_v Tempo que decorre desde a avaria de uma máquina com necessidade de revisão até à sua substituição

D Duração do ciclo de operação

C_f Custo da avaria

C_s Custo de arranque e de interrupção da produção

C_{rev} Custo de revisão

C_{rep} Custo de reparação

C_{pp} Custo de perda de produção por unidade de tempo

h Custo unitário de posse (por unidade de tempo) de uma máquina de reserva.

k Custo fixo unitário da mão de obra (por unidade de tempo)

B Custo incorrido no ciclo de operação

CT Custo total de manutenção do sistema por unidade de tempo

5.2. A Duração do Ciclo

A duração do ciclo é definida como o tempo que decorre desde o início de funcionamento de um determinado equipamento até ao instante da sua efectiva substituição. O ciclo compreende um intervalo de tempo em que o equipamento está a funcionar na estação de trabalho e um segundo intervalo de tempo que se estende até ao instante em que é substituído. O primeiro intervalo termina quando ocorre uma avaria ou quando se atinge o instante em que se deve proceder a uma revisão. A duração do segundo intervalo depende do número de equipamentos, substituídos ou não, que se encontram na fila de espera no final do primeiro. No segundo intervalo, sempre que as equipas de manutenção

estão todas ocupadas, os equipamentos com necessidade de revisão são mantidos activos até ao instante em que se inicia a revisão. Considera-se que a duração do arranque do equipamento é desprezável.

Todos os casos possíveis são discriminados a seguir. Tratam-se separadamente as duas situações distintas: L<R e L≥R. Para cada situação analisa-se, em primeiro lugar, os equipamentos que atingem o instante predefinido para se realizar a revisão e, em segundo lugar, os equipamentos que avariam antes de atingir esse instante.

Por uma questão de simplificação, utilizam-se os seguintes símbolos para representar respectivamente a fracção de equipamentos avariados e a fracção de equipamentos com necessidade de manutenção:

$$a = \frac{\lambda_f}{\lambda} + \varepsilon \quad e \quad b = \frac{\lambda_{rev}}{\lambda} - \varepsilon \tag{5.1}$$

5.2.1. Situação em que L<R

- ***Máquina que atinge o instante da revisão***

O gráfico a) da figura 20 apresenta as várias possibilidades para a duração do ciclo.

✓ Se houver disponibilidade de ambos os recursos ($A_L \cap A_R$)

A máquina é imediatamente substituída. O tempo de ciclo é T.

✓ Se não houver recursos humanos suficientes ($\overline{A_L} \cap A_R$)

A máquina com necessidade de revisão aguarda activa até ser atendida, instante em que será substituída pela máquina que é libertada do centro de manutenção. O tempo de ciclo será T+τ_{a1}, em que τ_{a1} representa o tempo médio de espera para substituição

da máquina nestas condições. Se a máquina falhar antes de ser substituída, ela será substituída de imediato se nesse instante houver máquinas de reserva disponíveis, caso contrário, ocorrerá perda de produção até ao instante em que uma outra máquina fique disponível para tomar o seu lugar. Designamos por t_1, o tempo médio até à avaria da máquina com necessidade de revisão. O tempo de ciclo é $T+t_1+z_1$, em que z_1 representa o tempo médio que a máquina, depois de avariada, espera até ser substituída. Designa-se por P_{NF} a probabilidade de um equipamento activo, que espera por uma revisão, funcionar até se iniciar a revisão e por P_F, a probabilidade de fahar.

✓ Se não houver recursos humanos nem máquinas de reserva disponíveis ($\overline{A_L} \cap \overline{A_R}$)

Tal como no caso anterior, a máquina mantém-se em funcionamento até haver disponibilidade de uma equipa de manutenção, e é substituída no mesmo instante. O tempo de ciclo será $T+\tau_{a2}$, em que τ_{a2} é o tempo médio de espera até a máquina ser atendida e substituída. Se a máquina falhar antes de ser substituída, o tempo de ciclo será $T+t_2+z_2$, em que t_2 é o tempo médio até à avaria da máquina e z_2 representa o tempo médio que a máquina, depois de avariada, espera até ser substituída.

➢ ***Máquina avariada***

O gráfico b) da figura 20 apresenta as várias possibilidades para a duração do ciclo.

✓ Se houver disponibilidade de ambos os recursos ($A_L \cap A_R$)

A máquina é imediatamente substituída. O tempo de ciclo é t.

✓ Se não houver recursos humanos suficientes ($\overline{A_L} \cap A_R$)

A máquina integra a fila de espera e é imediatamente substituída; o tempo de ciclo é t.

- ✓ Se não houver recursos humanos nem máquinas de reserva disponíveis ($\overline{A_L} \cap \overline{A_R}$)

  A máquina avariada aguarda na fila de espera para ser atendida, sendo substituída depois das máquinas avariadas que já se encontram na fila de espera; o tempo de ciclo será t**+** τ_{b2}**,** em que τ_{b2} representa o tempo médio necessário para se substituir a máquina avariada na fila.

Sendo f(t) a função densidade de probabilidade do tempo de avaria de um equipamento, a duração média do ciclo, D, será dada pela seguinte expressão:

$$D = \overline{F(T)}.\left\{ \begin{array}{l} (A_L \cap A_R).T + (\overline{A_L} \cap A_R).P_{NF}.\left[T + \tau_{a1}\right] + (\overline{A_L} \cap A_R).P_F.\left[T + t_1 + z_1\right] + \\ (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).P_{NF}.\left[T + \tau_{a2}\right] + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).P_F.\left[T + t_2 + z_2\right] \end{array} \right\} +$$
$$+ \int_0^T f(t).\left\{(A_L \cap A_R).t + (\overline{A_L} \cap A_R).t + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\left[t + \tau_{b2}\right]\right\}.dt$$

Em que

$$A_L \cap A_R = \sum_{i+j+1 \le L} P_{i,j} \quad (5.2)$$

$$\overline{A_L} \cap A_R = \sum_{L < i+j+1 \le R} P_{i,j} \quad (5.3)$$

$$\overline{A_L} \cap \overline{A_R} = \sum_{i+j+1 > R} P_{i,j} \quad (5.4)$$

Simplificando

$$D = \overline{F(T)}.\left\{ \begin{array}{l} T + (\overline{A_L} \cap A_R).P_{NF}.\tau_{a1} + (\overline{A_L} \cap A_R).P_F.\left[t_1 + z_1\right] + \\ (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).P_{NF}.\tau_{a2} + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).P_F.\left[t_2 + z_2\right] \end{array} \right\} + \quad (5.5)$$
$$+ \int_0^T f(t).\left\{t + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\tau_{b2}\right\}.dt$$

O desenvolvimento desta expressão encontra-se no apêndice I.
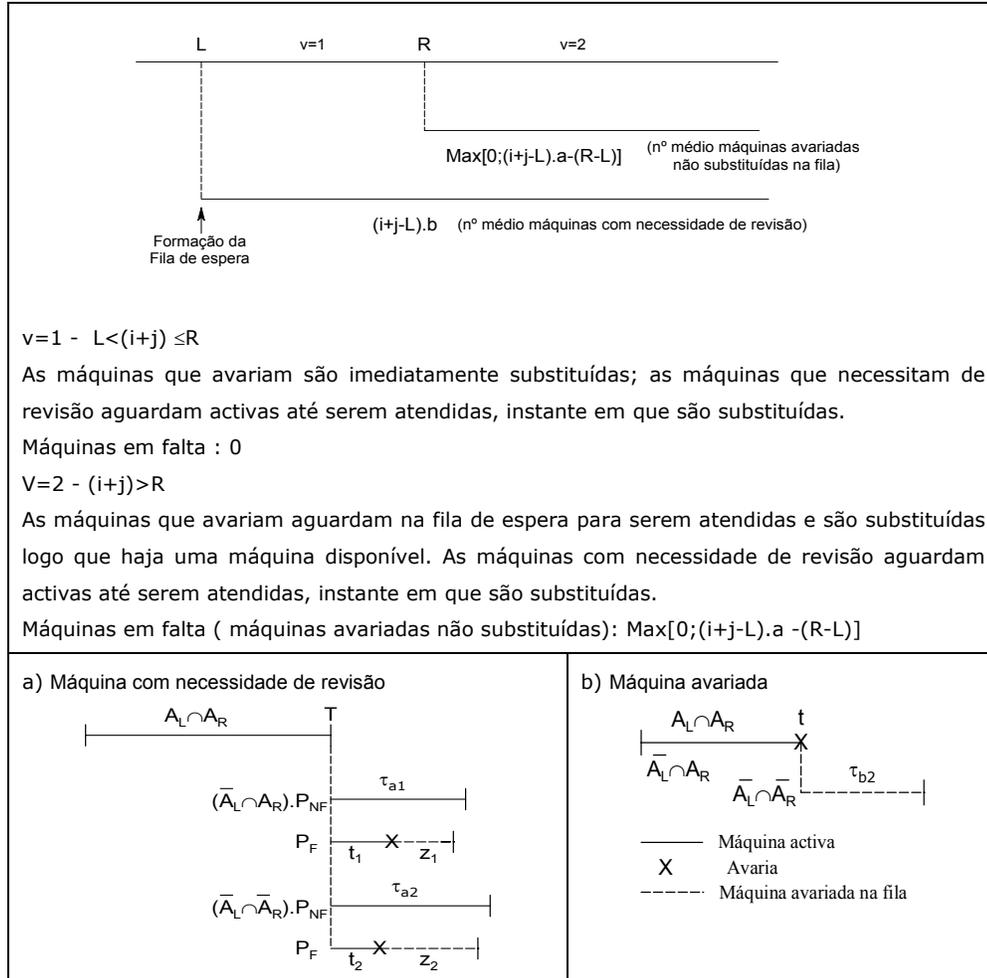
Figura 20: A duração do ciclo para L<R

5.2.2. *Situação em que L≥R*

➢ *Máquina que atinge o instante da revisão*

O gráfico a) da figura 21 apresenta as várias possibilidades para a duração do ciclo.

✓ Se houver disponibilidade de ambos os recursos ($A_R \cap A_L$)

A máquina é imediatamente substituída. O tempo de ciclo é T.

✓ Se não houver máquina de reserva disponível ($\overline{A_R} \cap A_L$)

A máquina com necessidade de revisão é atendida logo que necessita, sendo substituída depois das máquinas em falta (i.e. as máquinas com necessidade de revisão ou avariadas que entraram anteriormente no centro de manutenção e que não foram substituídas, devido à indisponibilidade de máquinas de reserva); o tempo de ciclo será T+τ_{a3}. Durante o tempo τ_{a3}, ocorre perda de produção.

✓ Se não houver recursos humanos disponíveis nem máquinas de reserva suficientes ($\overline{A_R} \cap \overline{A_L}$)

A máquina com necessidade de revisão aguarda activa até ser atendida, o que ocorrerá após terem sido atendidas as máquinas que solicitaram anteriormente uma operação de manutenção. A substituição só ocorrerá quando houver uma máquina disponível. O tempo de ciclo será T+τ_{a4}, em que τ_{a4} representa o tempo que a máquina espera até ser substituída. Na figura 21 a), θ_4 representa o tempo que decorre desde o instante em que a máquina é retirada de serviço para ser atendida até que uma outra máquina a substitua (intervalo em que ocorre perda de produção). Se enquanto espera, a máquina com necessidade de manutenção avaria, ocorrerá perda de produção a partir do instante da avaria, até ao instante em que a máquina é substituída; o tempo de ciclo continua a ser dado por T+τ_{a4}.

➢ ***Máquina avariada***

O gráfico b) da figura 21 apresenta as várias possibilidades para a duração do ciclo.

✓ Se houver disponibilidade de ambos os recursos ($A_R \cap A_L$)

A máquina é imediatamente substituída. O tempo de ciclo é t.

✓ Se não houver máquinas de reserva suficientes ($\overline{A_R} \cap A_L$)

A máquina avariada é imediatamente atendida, sendo substituída depois da substituição das máquinas que anteriormente solicitaram uma operação de manutenção; o tempo de ciclo será t + τ_{b3}.

✓ Se não houver recursos humanos disponíveis nem máquinas de reserva suficientes ($\overline{A_R} \cap \overline{A_L}$)

A máquina avariada integra a fila de espera e será substituída depois das máquinas que anteriormente solicitaram uma manutenção e que não foram substituídas por falta de máquinas de reserva; o tempo de ciclo será t+ τ_{b4} .

V=3 - R<(i+j)≤L

As máquinas com necessidade de uma manutenção (reparação ou revisão) são imediatamente atendidas mas não são imediatamente substituídas. A máquina i+j+1 só será substituída depois de se substituir as máquinas em falta (i+j-R máquinas), i.é, depois de ocorrerem i+j-R+1 saídas do centro de manutenção.

Máquinas em falta : i+j-R

V=4 - (i+j)>L

As máquinas avariadas vão para a fila de espera. As máquinas com necessidade de revisão aguardam activas até serem atendidas. A máquina i+j+1 só será substituída depois da substituição das máquinas ainda não substituídas (i+j-R máquinas), i.é, depois de ocorrerem i+j-R+1 saídas do centro de manutenção.

Máquinas em falta : (i+j-L).a+(L-R)

a) Máquina com necessidade de revisão

b) Máquina avariada

Figura 21: A Duração do Ciclo para L ≥ R

A duração média do ciclo, D, será então dada pela seguinte expressão:

$$D = \overline{F(T)}.\left\{\begin{array}{l}(A_R \cap A_L).T + (\overline{A_R} \cap A_L).\left[T + \tau_{a3}\right] + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).P_{NF}.\left[T + \tau_{a4}\right] \\ + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).P_F.\left[T + \tau_{a4}\right]\end{array}\right\} +$$

$$+ \int_0^T f(t).\left\{(A_R \cap A_L).t + (\overline{A_R} \cap A_L).\left[t + \tau_{b3}\right] + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\left[t + \tau_{b4}\right]\right\}dt$$

Em que

$$A_R \cap A_L = \sum_{i+j+1 \leq R} P_{i,j} \tag{5.6}$$

$$\overline{A_R} \cap A_L = \sum_{R < i+j+1 \leq L} P_{i,j} \tag{5.7}$$

$$\overline{A_R} \cap \overline{A_L} = \sum_{i+j+1 > L} P_{i,j} \tag{5.8}$$

Simplificando

$$D = \overline{F(T)}.\left\{T + (\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{a3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{a4}\right\} + \int_0^T f(t).\left\{t + (\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{b3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{b4}\right\}dt \tag{5.9}$$

O desenvolvimento desta expressão encontra-se no apêndice I.

5.2.3. Determinação dos Tempos de Substituição

- ***Considerações gerais***

❖ Para os casos v=1, v=2 e v=4, considera-se que o intervalo de tempo entre saídas sucessivas do centro de manutenção segue a distribuição: g(t) = $\mu.e^{-\mu t}$ em que μ é a taxa de serviço dos servidores (equipas de manutenção) activos.

$$\mu = L.a.\mu_{rep} + L.b.\mu_{rev} \tag{5.10}$$

A distribuição do tempo de espera de uma máquina que tenha de esperar pela ocorrência de r+1 saídas do centro de manutenção é uma distribuição Gamma, já que a soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo uma distribuição Exponencial Negativa segue uma distribuição Gamma.

$$W_{r+1}(t) = \mu^{r+1}.\frac{t^r e^{-\mu t}}{\Gamma(r+1)} \tag{5.11}$$

O tempo médio de espera será dado por:

$$\int_0^\infty t.\mu^{r+1}.\frac{t^r e^{-\mu t}}{\Gamma(r+1)}.dt = \frac{r+1}{\mu} \tag{5.12}$$

que é a média da distribuição Gamma.

Sendo r+1 um valor inteiro, estamos perante um caso particular da distribuição Gamma que é a distribuição de Erlang, em que $\Gamma(r+1)$ =r!.

Se r+1 representar o número de saídas que têm de ocorrer para se substituir a máquina i+j+1, podemos calcular os tempos médios de substituição para os casos v=1, v=2 e v=4.

❖ Para v=3 (R<i+j≤L), o número de máquinas em manutenção (reparação ou revisão) é menor do que L e varia sempre que ocorre uma entrada ou saída no centro de manutenção não sendo possível, neste caso, recorrer à distribuição Gamma.

Assim Construiu-se um algoritmo que calcula o tempo médio de substituição, somando iterativamente os tempos entre saídas (ver figura 22). Considerou-se um total de (i+j-R)+1 saídas, uma vez que a máquina i+j+1 é substituída após ocorrerem (i+j-R)+1 saídas do centro de manutenção.

Número médio de entradas entre duas saídas consecutivas

Considerando que o número de entradas no centro de manutenção no intervalo (0,t] segue uma distribuição de Poisson com parâmetro λ_s e que o tempo t entre saídas consecutivas do centro de manutenção segue uma distribuição Exponencial Negativa com média $1/\mu$, a probabilidade de ocorrerem y entradas no centro de manutenção entre duas saídas consecutivas é dada por (ver apêndice II):

$$\Pr(Y = y) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_s t}.(\lambda_s t)^y}{y!}.\mu.e^{-\mu t}.dt \qquad (5.13)$$

O número esperado de entradas E[Y] é dado por:

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{\infty} y \Pr(Y = y) = \sum_{y=0}^{\infty} y \int_0^\infty \mu.e^{-\mu t}.\frac{e^{-\lambda_s t}.(\lambda_s t)^y}{y!}.dt$$

$$\Leftrightarrow E[Y] = \frac{\lambda_s}{\mu} \qquad (5.14)$$

Algoritmo para cálculo de τ_{a3} e τ_{b3}

Designámos por n o intervalo entre a saída ϕ e a saída $\phi+1$ e considerámos que X_n é o número de máquinas com necessidade de manutenção no início do intervalo n, e que Y_n é o número médio de máquinas que avariam ou solicitam uma revisão no intervalo n (segundo a expressão 5.14)).

Assumimos a seguinte relação:

$$X_n = X_{n-1} + Y_{n-1} - 1 \qquad (5.15)$$

O tempo para substituir $\phi+1$ máquinas será dado por:

$$\tau_n = \tau_{n-1} + \tau \, , \qquad (5.16)$$

em que τ representa o tempo entre a saída ϕ e a saída $(\phi+1)$.

τ é dado por

$$\tau = \frac{1}{\mu_n} \; , \tag{5.17}$$

em que μ_n (taxa de manutenção no intervalo n) tem a seguinte expressão:

$$\mu_n = Min\,(L; X_n).(\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} + \frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev}) \tag{5.18}$$
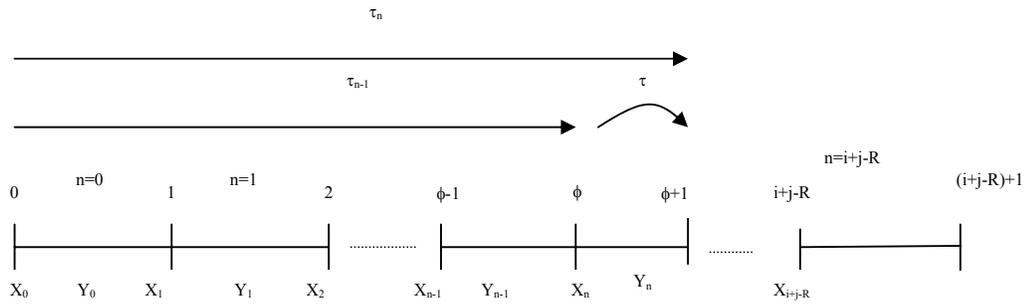
Figura 22: Cálculo iterativo para v=3

♦ *O algoritmo*

$X_0 = i+j+1;\ \mu_0 = X_0.(\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} + \frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev})\ ;\ \tau_0 = \frac{1}{\mu_0}$

Para n=1 até n= i+j-R

Se $X_{n-1} \leq L$ *(v= 3) então*

$\lambda_{s(n-1)} = \{M - (X_{n-1} - R)\}.\lambda$ *(taxa de avaria no intervalo n-1)*

Senão (v= 4)

$\lambda_{s(n-1)} = \{M - (X_{n-1} - L).a - (L - R)\}.\lambda_f + \{M - (X_{n-1} - R)\}.\lambda_{rev}$

$Y_{n-1} = \frac{\lambda_{s(n-1)}}{\mu_{n-1}}$

$X_n = X_{n-1} + Y_{n-1} - 1$

$\mu_n = Min\,(L; X_n).(\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} + \frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev})$

$\tau = \frac{1}{\mu_n}$

$\tau_n = \tau_{n-1} + \tau$

- ***Situação em que L<R***

1) Máquina com necessidade de revisão

As expressões de τ_{a1} e τ_{a2} são determinadas recorrendo à média da distribuição Gamma, considerando r=i+j-L, uma vez que a máquina com necessidade de revisão é substituída no mesmo instante em que se inicia o seu atendimento:

$$\tau_{a1} = \tau_{a2} = \frac{(i+j-L)+1}{u} \tag{5.19}$$

O tempo médio até à avaria t_v de uma máquina activa com necessidade de revisão é obtido recorrendo à distribuição de Erlang (distribuição do tempo para substituição de uma máquina com necessidade de revisão) e à distribuição Exponencial Negativa com parâmetro $1/\lambda_f$ (distribuição do tempo até à avaria de uma máquina activa).

$$t_v = \frac{\int_0^{\infty}\int_0^{t} \mu^{r+1}.\frac{t^r e^{-\mu t}}{r!}.t_2.\lambda_f e^{-\lambda_f t_2}.dt_2.dt}{P_F} \tag{5.20}$$

t_1, t_2 têm a mesma expressão: as taxas de manutenção são idênticas, assim como a expressão do número de saídas até ser iniciado o atendimento (r= i+j-L).

Resolvendo os integrais, obtém-se (ver apêndice III):

$$t_v = \frac{\mu^{r+1}.\left[-\frac{r+1}{(\mu+\lambda_f)^{r+2}} - \frac{1}{\lambda_f}.\left\{\frac{1}{(\mu+\lambda_f)^{r+1}} - \frac{1}{\mu^{r+1}}\right\}\right]}{P_F} \tag{5.21}$$

Para v=1 e v=2, as máquinas avariadas são substituídas logo que possível e as máquinas com necessidade de manutenção são mantidas activas. Uma máquina com necessidade de revisão que avaria enquanto espera pela revisão passa a ser tratada, para efeitos de

substituição, como uma máquina avariada. Por conseguinte, a máquina é substituída depois da substituição das máquinas em falta no instante da avaria (máquinas avariadas não substituídas).

Considera-se que o sistema se encontra no estado estacionário (as probabilidades de estado são independentes do tempo) e assume-se que o estado do sistema, no instante em que ocorre a avaria, é independente do estado do sistema no momento em que é solicitada a revisão.

Sendo assim, o número médio de máquinas em falta no instante da avaria pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$r_f = \frac{\sum_{i+j \geq L} P_{i,j} . Max\left[0; (i+j-L).a - (R-L)\right]}{\sum_{i+j \geq L} P_{i,j}} \tag{5.22}$$

em que Max[0;(i+j-L).a-(R-L)] representa o número médio de máquinas em falta para o estado (i,j).

Por analogia a τ_{b2} (apresentado a seguir), z_1 e z_2 serão dados por:

$$z_1 = z_2 = \frac{(r_f + 1)/a}{\mu} \tag{5.23}$$

2) Máquina avariada

Para L<i+j<R (v=1),

(i+j-L).a → é o número médio de equipamentos avariadas na fila de espera

(R-L) → é o número de máquinas de reserva ainda disponíveis no momento em que as equipas de manutenção ficam todas ocupadas.

Se (i+j-L).a+1≤R-L, a máquina avariada i+j+1 pode ser substituída imediatamente porque existem máquinas de reserva suficientes. Lembra-se que, sempre que existem L ou mais máquinas no centro de

manutenção, as máquinas de reserva só substituem máquinas avariadas, sendo as máquinas com necessidade de revisão substituídas pelas máquinas que saem do centro de manutenção imediatamente antes de ser iniciada a revisão (para v=1,2).

Se (i+j-L).a+1>R-L, a máquina avariada i+j+1 não pode ser substituída imediatamente (não existem máquinas de reserva disponíveis). A máquina que sai do centro de manutenção vai substituir a máquina cuja operação de manutenção é iniciada, quer seja uma revisão ou uma reparação. Se a intervenção iniciada é uma reparação, a máquina que sai do centro de manutenção vai substituir a próxima máquina avariada (ainda não substituída), que se encontra na fila de espera.

Sendo Max[0;(i+j-L).a+1-(R-L)] o número de máquinas avariadas ainda não substituídas, então a máquina avariada i+j+1 será substituída após ocorrerem {Max[0;(i+j-L).a+1-(R-L)]/a} saídas do centro de manutenção (número de máquinas avariadas não substituídas, a dividir pela fracção de máquinas avariadas na fila).

O tempo que decorre até ocorrer a substituição é:

$$\tau_{b2} = \frac{Max\left[0;(i+j-L).a+1-(R-L)\right]/a}{\mu} \tag{5.24}$$

➢ ***Situação em que R≤L***

1) Máquina com necessidade de revisão

τ_{a3} é determinado com base no algoritmo apresentado anteriormente, em que r= i+j+R.

Para τ_{a4} obtém-se:

$$\tau_{a4} = \frac{(i+j-R)+1}{\mu} \tag{5.25}$$

θ_4 representa o tempo que decorre desde o início da intervenção preventiva até à substituição da máquina, ocorrendo perda de produção. Este tempo é dado por:

$$\theta_4 = \frac{L - R}{\mu} \tag{5.26}$$

t_4 é determinado pela expressão 5.21, em que r= i+j-L.

z_4 pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$z_4 = \tau_{a4} - t_4 \tag{5.27}$$

Quer a máquina falhe ou não, o tempo para efectuar a substituição é sempre τ_{a4}.

2) Máquina avariada

τ_{b3} é determinado com base no algoritmo apresentado anteriormente, em que r= i+j+R.

A expressão de τ_{b4} é determinada recorrendo à média da distribuição Gamma, considerando r=i+j-R, uma vez que a máquina avariada é substituída depois da substituição das máquinas que entraram anteriormente no centro de manutenção:

$$\tau_{b4} = \frac{(i + j - R) + 1}{\mu} \tag{5.28}$$

5.2.4. Probabilidade de Falha de um Equipamento Activo à Espera de uma Revisão

Tal como o tempo médio até à avaria t_v, a probabilidade de falha P_F é determinada recorrendo à distribuição de Erlang (distribuição do tempo para substituição de uma máquina com necessidade de revisão) e à distribuição Exponencial Negativa com parâmetro $1/\lambda_f$ (distribuição do tempo até à avaria de uma máquina activa).

$$\mathrm{P_F} = \int_0^{\infty} \int_0^{t} \mu^{r+1}.\frac{t^r e^{-\mu t}}{r!}.\lambda_f e^{-\lambda_f t_2} dt_2.dt \tag{5.29}$$

$$= \int_0^{\infty} \mu^{r+1}.\frac{t^r e^{-\mu t}}{r!}.\int_0^{t} \lambda_f.e^{-\lambda_f t_2} dt_2.dt$$

$$= \int_0^{\infty} \mu^{r+1}.\frac{t^r e^{-\mu t}}{r!}.\left[1 - e^{-\lambda_f t}\right]dt$$

$$= \frac{\mu^{h\ +1}}{r!}\left[\int_0^{\infty} t^r e^{-\mu t}.dt - \int_0^{\infty} t^r e^{-(\mu+\lambda_f)t}.dt\right]$$

$$= \frac{\mu^{r+1}}{r!}\left[\frac{r!}{\mu^{r+1}} - \frac{r!}{(\mu+\lambda_f)^{r+1}}\right]$$

$$= 1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda_f}\right)^{r+1}$$

A probabilidade de não falhar também pode ser calculada da mesma forma:

$$\mathrm{P_{NF}} = \int_0^{\infty} \mu^{r+1}.\frac{t^r e^{-\mu t}}{r!}.e^{-\lambda_f t} dt \tag{5.30}$$

$$= \frac{\mu^{r+1}}{r!}\int_0^{\infty} t^r.e^{-(\mu+\lambda_f)t} dt$$

$$= \frac{\mu^{r+1}}{r!}.\frac{r!}{(\mu+\lambda_f)^{r+1}}$$

$$= \left(\frac{\mu}{\mu+\lambda_f}\right)^{r+1}$$

Como seria de esperar, P_{NF} = 1- P_F.

As expressões de P_F e P_{NF} dependem do valor de r (número de máquinas a substituir) cujo valor é r = i+j-L.

5.3. *O Modelo de Custos*

O aumento do número de equipas de manutenção e do número de máquinas de reserva trazem um acréscimo no custo de manutenção, que deve ser ponderado com o decréscimo originado no custo de perda de produção do sistema. Da mesma forma, os custos associados à realização de revisões periódicas devem ser ponderados com os custos associados à manutenção correctiva. Sendo assim, o modelo de custos irá incluir todos os custos de manutenção que dependem do número de máquinas de reserva, do número de equipas de manutenção e do intervalo entre revisões.

Para além dos custos de posse de equipamentos de reserva e dos custos fixos de mão de obra, os restantes custos de manutenção podem ser divididos em custos associados às avarias e custos associados às revisões.

Os custos originados pela avaria de uma máquina são:

- custo de reparação (custo do material e peças e custo da mão de obra), designado por C_{rep};
- custo da avaria (custo de perda de qualidade antes de ocorrer a avaria, custo de perda de material em processamento), designado por C_f;
- custo de perda de produção (se não houver máquina de reserva disponível), que inclui custos directos e indirectos, designado por C_{pp};
- custo de arranque e de interrupção da produção, designado por C_s.

Uma revisão implica os seguintes custos:

– custo de revisão (custo de material e peças e custo de mão de obra), designado por C_{rev};

– custo de perda de produção associado às duas situações seguintes:

① quando R ≤ (i+j)<L

② quando uma máquina com necessidade de revisão, mantida activa, avaria (esta situação acarreta também um custo de avaria e reparação).

– custo de arranque e de interrupção da produção;

As figuras 23 e 24 indicam os custos incorridos em cada situação.
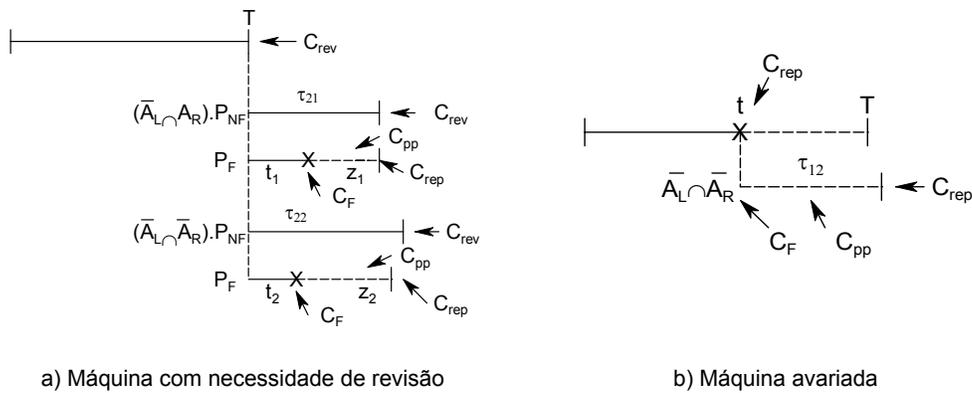
Figura 23: Os Custos de Manutenção L<R

❖ A expressão matemática para os custos associados às avarias e revisões no ciclo de trabalho para L<R é:

$$B = C_s + \overline{F}(T).\{ (A_L \cap A_R).C_{rev} + (\overline{A_L} \cap A_R).[C_{rev}.P_{NF} + (C_f + C_{rep} + C_{pp}.z_1).P_F] + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).[C_{rev}.P_{NF} + (C_f + C_{rep} + C_{pp}.z_2).P_F\} + F(T).\{C_f + C_{rep} + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).C_{pp}.\tau_{b2}\} \quad (5.31)$$
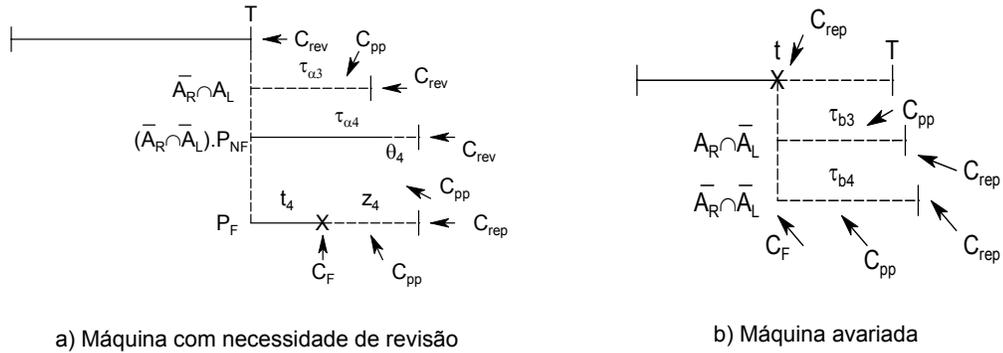
Figura 24: Os Custos de Manutenção R≤L

❖ A expressão matemática para os custos associados às avarias e revisões no ciclo de trabalho para R≤L é:

$$B = C_s + \overline{F}(T).\{(A_R \cap A_L).C_{rev} + (\overline{A_R} \cap A_L).[C_{rev} + C_{pp}.\tau_{a3}] + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).[(C_{rev} + C_{PP}.\theta_4).P_{NF} + (C_f + C_{rep} + C_{pp}.(\tau_{a4} - t_4)).P_F]\} + F(T).\{C_f + C_{rep} + (\overline{A_R} \cap A_L).C_{pp}.\tau_{b3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).C_{pp}.\tau_{b4}\} \quad (5.32)$$

O custo total (CT) por unidade de tempo é dado pela seguinte expressão:

$$CT = M.\frac{B}{D} + h * R + k * L, \quad (5.33)$$

em que h é o custo de posse por unidade de tempo das máquinas de reserva e k é o custo fixo por unidade de tempo associado à mão de obra.

A expressão do custo total é constituída por três parcelas. A primeira parcela inclui o custo incorrido no ciclo de trabalho (B), que é divido pela duração do ciclo (D) para obter o custo por unidade de tempo no ciclo. A segunda parcela representa o custo de posse das máquinas de reserva por unidade de tempo e a terceira e última parcela representa o custo fixo de mão de obra.

CAP 6. OUTRAS MEDIDAS DE DESEMPENHO DO SISTEMA

Para melhor caracterizar e comparar diferentes configurações do sistema, desenvolveram-se expressões para calcular algumas medidas de desempenho relevantes para os *maintenance float systems*. Tais medidas são directamente obtidas a partir das probabilidades de estado, com excepção da última medida apresentada - a taxa média de ocupação do posto, que se baseia na expressão da duração do ciclo, definido para determinar o custo de manutenção por unidade de tempo.

As duas primeiras medidas de desempenho apresentadas (a probabilidade de ocorrer fila de espera e o cumprimento médio da fila) são derivadas da teoria das filas de espera e destinam-se a avaliar a capacidade dos servidores face à procura dos clientes que são, na situação em causa, os equipamentos avariados ou com necessidade de revisão.

As quatro medidas seguintes (Probabilidade de não haver capacidade de substituição, incapacidade média de substituição, número médio de equipamentos avariados não substituídos e número médio de equipamentos em falta) permitem avaliar a capacidade de substituição dos equipamentos na estação de trabalho face à fiabilidade do sistema e à capacidade e rapidez do serviço de manutenção.

A última medida apresentada neste capítulo, a taxa média de ocupação de um posto, permite identificar a fracção ou percentagem de tempo em que um posto da estação de trabalho se encontra ocupado por um equipamento activo.

6.1. Probabilidade de Ocorrer Fila de Espera

A fila de espera ocorre quando o número de equipamentos avariados e o número de equipamentos com necessidade de revisão ultrapassa o número de equipas de manutenção. A probabilidade de ocorrer fila de espera (P_{wq}) é dada por:

$$P_{wq} = \sum_{i+j \geq L} P_{i,j} \tag{6.1}$$

6.2. Comprimento Médio da Fila de Espera

O comprimento da fila de espera (L_q) é dado pela diferença entre o número de equipamentos com necessidade de manutenção e o número de equipas de manutenção:

$$L_q = \sum_{i+j \geq L} (i + j - L).P_{i,j} \tag{6.2}$$

6.3. Probabilidade de não Haver Capacidade de Substituição

A probabilidade de não haver capacidade de substituição (P_{su}) corresponde à probabilidade de o sistema se encontrar em estados em que o número de equipamentos com necessidade de manutenção é igual ou superior ao número de equipamentos de reserva. Esta probabilidade não é equivalente à probabilidade de não existirem equipamentos de reserva disponíveis, uma vez que se considerou que os equipamentos de reserva não substituem equipamentos com necessidade de revisão para $i+j>L$.

$$P_{su} = \sum_{i+j \geq R} P_{i,j} \tag{6.3}$$

6.4. Incapacidade Média de Substituição

A Incapacidade Média de Substituição N_{nr}, ou Número médio de equipamentos com necessidade de manutenção que não podem ser substituídos, é dada pela expressão:

$$N_{nr} = \sum_{i+j \geq R} (i + j - R).P_{i,j} \tag{6.4}$$

Esta expressão representaria o número de equipamentos em falta na estação de trabalho se os equipamentos com necessidade de revisão não fossem mantidos activos enquanto esperam pela revisão.

6.5. Número Médio de Equipamentos Avariados não Substituídos

A expressão para determinação do número de equipamentos avariados, ainda não substituídos (N_{fnr}) é diferente para um sistema em que L<R ou em que R ≤ L.

Para L<R

Enquanto existem equipas de manutenção disponíveis, os equipamentos avariados ou com necessidade de revisão são substituídos. Depois de se esgotarem as equipas de manutenção, forma-se uma fila de espera onde, fisicamente, só se encontram equipamentos avariados. Estes equipamentos podem ter sido todos substituídos se o seu número não ultrapassa a diferença (R-L). Caso contrário, alguns deles deixaram um posto inocupado na estação de trabalho, originando perda de produção.

$$N_{fnr} = \sum_{i+j \geq R} Max\left[0; (i + j - L).(\frac{\lambda_f}{\lambda} + \varepsilon) - (R - L)\right].P_{i,j} \tag{6.5}$$

Para R ≤ L

Enquanto o número de equipamentos com necessidade de manutenção não ultrapassa o número de equipas de manutenção, o número de

equipamentos avariados, ainda não substituídos, é dado por $(i+j-R).\frac{\lambda_f}{\lambda}$, que corresponde à média de uma distribuição binomial (o equipamento que entra no centro de manutenção é um equipamento avariado ou é um equipamento com necessidade de manutenção).

Quando o número de equipamentos com necessidade de manutenção ultrapassa o número de equipas de manutenção, o número de equipamentos avariados, ainda não substituídos, corresponde à soma do número de equipamentos avariados na fila de espera com o número de equipamentos avariados que entraram no centro de manutenção no intervalo que vai desde o instante em que i+j=R até ao instante em que i+j=L.

$$N_{fnr} = \sum_{\substack{i+j\geq R \\ i+j<L}} (i+j-R).\frac{\lambda_f}{\lambda}.P_{i,j} + \sum_{\substack{i+j\geq R \\ i+j\geq L}} \left[(i+j-L).(\frac{\lambda_f}{\lambda}+\varepsilon) + (L-R).\frac{\lambda_f}{\lambda} \right].P_{i,j} \quad (6.6)$$

6.6. Número Médio de Equipamentos em Falta

Para L<R

A expressão para a determinação do número médio de equipamentos em falta na estação de trabalho (N_L) corresponde à expressão para a determinação do número médio de equipamentos avariados, ainda não substituídos (expressão 6.5), uma vez que os equipamentos que atingem o final do intervalo de revisão, sem avariar, são mantidos activos. Os equipamentos em falta correspondem aos equipamentos avariadas.

Para R ≤ L

Enquanto o número de equipamentos com necessidade de manutenção não ultrapassar o número de equipas de manutenção, o número de equipamentos em falta na estação de trabalho é dado pela diferença (i+j-R).

Quando o número de equipamentos com necessidade de manutenção ultrapassar o número de equipas de manutenção, o número de unidades em falta é dado pela soma do número de equipamentos avariados na fila de espera com (L-R), em que (L-R) corresponde ao número de equipamentos cuja manutenção foi iniciada imediatamente, devido à existência de equipas de manutenção livres sem, no entanto, terem sido imediatamente substituídas.

$$N_L = \sum_{\substack{i+j \geq R \\ i+j<L}} (i+j-R).P_{i,j} + \sum_{\substack{i+j \geq R \\ i+j \geq L}} \left[(i+j-L).(\frac{\lambda_f}{\lambda} + \varepsilon) + (L-R) \right] .P_{i,j} \qquad (6.7)$$

6.7. *Taxa Média de Ocupação de um Posto*

A taxa média de ocupação de um posto na estação de trabalho (Q), durante um ciclo, é facilmente determinada tendo em conta o intervalo de tempo em que o equipamento se encontra activo na estação de trabalho e o intervalo de tempo em que não se encontra activo.

A taxa média de ocupação de um posto num ciclo (ou a percentagem de tempo em que o equipamento permanece activo na estação de trabalho) é determinada pela fracção:

$$Q = \frac{T_{up}}{D} \qquad (6.8)$$

Uma vez que a expressão da duração do ciclo já foi determinada no capítulo 5, resta determinar a expressão do numerador (T_{up}), que corresponde ao tempo em que o equipamento se encontra activo na estação de trabalho.

Com base nas figuras 25 e 26, em que os intervalos de tempo que correspondem ao funcionamento do equipamento estão assinalados a traço cheio, deduziu-se o tempo T_{up} para ambas as situações - $L<R$ e $L \geq R$.

Para L<R

$$\mathrm{T_{up}} = \overline{\mathrm{F(T)}}.\left\{\begin{matrix} (A_L \cap A_R).T + (\overline{A_L} \cap A_R).P_{NF}.\left[T+\tau_{a1}\right] + (\overline{A_L} \cap A_R).P_F.\left[T+t_1\right] + \\ (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).P_{NF}.\left[T+\tau_{a2}\right] + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).P_F.\left[T+t_2\right] \end{matrix}\right\} +$$

$$+ \int_0^T f(t).\left\{(A_L \cap A_R).t + (\overline{A_L} \cap A_R).t + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).t\right\} dt$$

Simplificando

$$\mathrm{T_{up}} = \overline{\mathrm{F(T)}}.\left\{\begin{matrix} T + (\overline{A_L} \cap A_R).P_{NF}.\tau_{a1} + (\overline{A_L} \cap A_R).P_F.t_1 + \\ (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).P_{NF}.\tau_{a2} + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).P_F.t_2 \end{matrix}\right\} + \int_0^T f(t).t.dt \qquad (6.9)$$
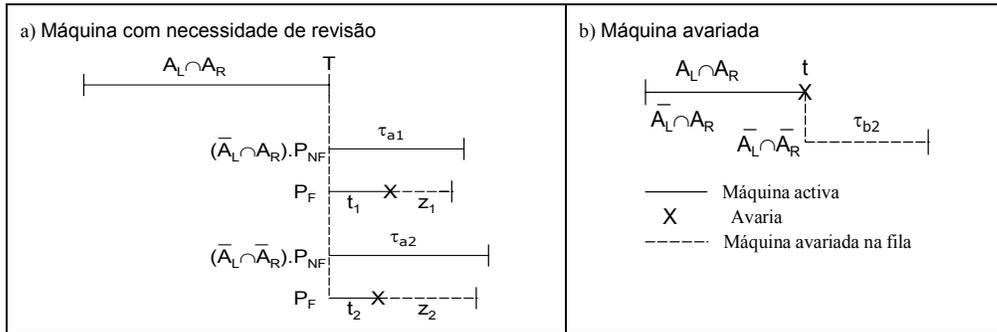
Figura 25: O ciclo para L<R

Para R≤L

$$\mathrm{T_{up}} = \overline{\mathrm{F(T)}}.\left\{\begin{matrix} (A_R \cap A_L).T + (\overline{A_R} \cap A_L).T + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).P_{NF}.\left[T + (\tau_{a4} - \theta_4)\right] \\ + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).P_F.\left[T+t_4\right] \end{matrix}\right\} +$$

$$+ \int_0^T f(t).\left\{(A_R \cap A_L).t + (\overline{A_R} \cap A_L).t + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).t\right\} dt$$

Simplificando

$$\mathrm{T_{up}} = \overline{\mathrm{F(T)}}.\left\{\begin{matrix} T + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).P_{NF}.(\tau_{a4} - \theta_4) \\ + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).P_F.t_4 \end{matrix}\right\} + \int_0^T f(t).t.dt \qquad (6.10)$$
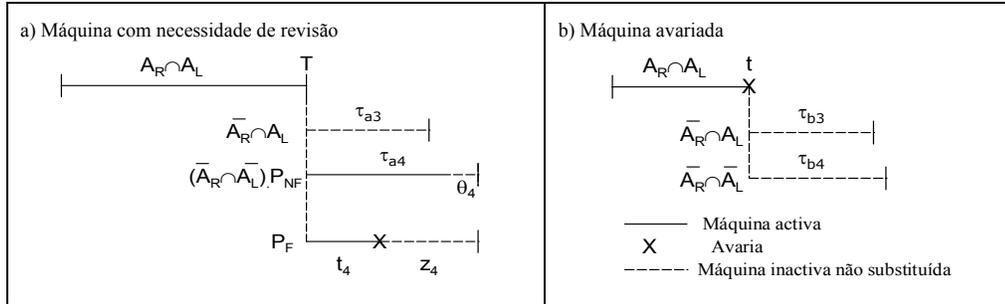
Figura 26: O ciclo para R≤L

CAP 7. ANÁLISE DE RESULTADOS

A validação e teste do modelo que determina as probabilidades de estado do sistema no estado estacionário implicaram o desenvolvimento de uma aplicação informática, que permitiu obter resultados e observar o efeito produzido pela alteração do número de equipamentos de reserva, do número de equipas de manutenção e do intervalo entre revisões nas várias medidas de desempenho do sistema.

Na primeira secção deste capítulo apresenta-se a análise que se efectuou na procura da validação do modelo. Na segunda secção, analisam-se várias configurações para um sistema, observando e comparando os valores obtidos para diferentes medidas de desempenho.

7.1. Validação do Modelo

O programa desenvolvido, para determinar as probabilidades de estado de sistemas e respectivas medidas de desempenho, foi testado para diferentes valores dos parâmetros, com especial atenção para valores extremos, de forma a validar o modelo.

A realização destes testes revelou que, para valores elevados de λ_{rev} e de $i+j$, é necessário ter especial atenção ao comprimento da fila de espera de equipamentos com necessidade de revisão cujo valor é limitado pelo número de postos na estação de trabalho. De facto, não é possível existir mais do que M equipamentos com necessidade de revisão em simultâneo, uma vez que estes equipamentos não integram

fisicamente a fila de espera e são mantidos activos na estação de trabalho.

As modificações introduzidas no modelo, que se assinalam a seguir, incidem sobre as situações v=1, 2 e 4, não havendo formação de fila de espera nas restantes situações (v= 0, 3).

v=1

$P'_{i,j}(t) = [- M.\lambda_f - \{M- \boxed{Min[(i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}; M]}\}.\lambda_{rev} - L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} - L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev}]$ $.P_{i,j}(t)$

$+ \{M- \boxed{Min[(i-1+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}; M]}\}. \lambda_f$ $.P_{i-1,j}(t)$

$+ \{M- \boxed{Min[(i+j-1-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}; M]}\}. \lambda_{rev}$ $.P_{i,j-1}(t)$

$+ L.\frac{\lambda_f}{\lambda}. \mu_{rep}$ $.P_{i+1,j}(t)$

$+ L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}. \mu_{rev}$ $.P_{i,j+1}(t)$

$+ \boxed{Min[(i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}; M]}.\lambda_f$ $.P_{i-1,j+1}(t)$

v=2

$P'_{i,j}(t) = [-\{M- Max[0, (i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} -(R-L)]\}.\lambda_f - \{M- Max[0, (i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} -(R-L)]-\boxed{Min[(i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda};M]}\}.\lambda_{rev} - L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} - L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev}]$ $.P_{i,j}(t)$

$+ \{M- Max[0, (i-1+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} -(R-L)]-\boxed{Min[(i-1+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda};M]}\}. \lambda_f$

$.P_{i-1,j}(t)$

$+ \{M- Max[0, (i+j-1-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} -(R-L)]-\boxed{Min[(i+j-1-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}; M]}\}. \lambda_{rev}$ $.P_{i,j-1}(t)$

$+ \ L.\frac{\lambda_f}{\lambda}$. μ_{rep} $.P_{i+1,j}(t)$

$+ \ L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}$. μ_{rev} $.P_{i,j+1}(t)$

$+$ $Min[(i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}; M]$. λ_f $.P_{i-1,j+1}(t)$

v=4

$P'_{i,j}(t) = [- \{M-(i+j-L) \ .\frac{\lambda_f}{\lambda} - (L-R)\}.\lambda_f - \{M- (i+j-R)\}.\lambda_{rev} - L.\frac{\lambda_f}{\lambda}.\mu_{rep} - L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}.\mu_{rev}]$ $.P_{i,j}(t)$

$+ \{M- (i-1+j-R)\}. \lambda_f$ $.P_{i-1,j}(t)$

$+ \{M- (i+j-1-R)\}. \lambda_{rev}$ $.P_{i,j-1}(t)$

$+ \ L.\frac{\lambda_f}{\lambda}$. μ_{rep} $.P_{i+1,j}(t)$

$+ L.\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}$. μ_{rev} $.P_{i,j+1}(t)$

$+$ $Min[(i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}; M]$. λ_f $.P_{i-1,j+1}(t)$

Da mesma forma, a expressão da taxa de entrada de equipamentos para a fila de espera (expressões 4.18 e 4.19), utilizada na determinação do número médio de equipamentos presentes na fila, (w_q) teve também de ser alterada.

v=1

$$\lambda_{s1} = M.\lambda_f + \left[M - Min\left[\ (i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}; M \right] \right].\lambda_{rev}$$

v=2

$$\lambda_{s2} = \left[M - Max\left[0; (i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} - (R-L) \right] \right] .\lambda_f$$
$$+ \left[M - Max\left[0; (i+j-L).\frac{\lambda_f}{\lambda} - (R-L) \right] - Min\left[(i+j-L).\frac{\lambda_{rev}}{\lambda}; M \right] \right] .\lambda_{rev}$$

Para além de testar o modelo para valores extremos dos dados de entrada, comparam-se também os valores provenientes do modelo obtido com o modelo de Gupta & Rao (1996), que considera a existência de apenas uma equipa de manutenção e não equaciona a possibilidade de efectuar revisões periódicas. Gupta & Rao (1996) apresenta os resultados para um sistema com 10 máquinas activas, 2 máquinas de reserva, uma taxa de avarias de 0,2 e um tempo médio de reparação de 1 unidade de tempo.

Atribuiu-se um valor elevado a T (T=∞) e obtiveram-se os valores das probabilidades de estado com base no modelo proposto. Os dados obtidos, que se apresentam na tabela a seguir, coincidem exactamente com os valores obtidos por Gupta & Rao (1996).

$P_{0,0}$	0,45336E-02	$P_{7,0}$	0,17548E+00
$P_{1,0}$	0,90673E-02	$P_{8,0}$	0,17548E+00
$P_{2,0}$	0,18135E-01	$P_{9,0}$	0,14039+00
$P_{3,0}$	0,36269E-01	$P_{10,0}$	0,84232E-01
$P_{4,0}$	0,65284E-01	$P_{11,0}$	0,33693E-01
$P_{5,0}$	0,10445E+00	$P_{2,0}$	0,67386E-02
$P_{6,0}$	0,14624E+00	$\sum$	0,10000E+01

Tabela 2: Probabilidades de estado para T=∞

Para os estados em que j é diferente de zero, as probabilidades de estado obtidas $P_{i,j}$ são nulas.

7.2. Efeito da Variação dos Parâmetros nas Medidas de Desempenho

Para analisar os resultados produzidos pelo modelo construído, foram determinados diversos resultados para um sistema com 10 máquinas activas, com uma taxa de avarias individual λ=0.3, uma taxa de reparação μ_{rep}=0.5 e uma taxa de revisão μ_{rev}=1.3.

Equipamentos activos - M	10
Taxa de avarias - λ	0,3
Taxa de reparação - μ_{rep}	0,5
Taxa de revisão - μ_{rev}	1,3

Tabela 3: Dados de entrada do sistema

7.2.1. O Comprimento da Fila de Espera e o Número de Máquinas em Falta

Considerou-se um sistema inicial com 3 equipas de manutenção e 2 máquinas de reserva, cujo período entre revisões é igual a 4 unidades de tempo. Com base nesse sistema inicial, alterou-se, alternadamente (mantendo os restantes parâmetros constantes), o número de equipas de manutenção, o número de máquinas de reserva e o período entre revisões. Para cada configuração, determinaram-se os valores das medidas de desempenho que foram directamente obtidas a partir das probabilidades de estado.

Foram realizadas algumas iterações de forma a corrigir as probabilidades de estado, tendo em consideração as máquinas que avariam enquanto esperam, activas, por uma revisão. O critério de paragem deste processo iterativo consistiu em alcançar um valor

inferior ou igual a 0.00005 para a diferença entre valores consecutivos de ε.

As tabelas de resultados para a variação de cada parâmetro (L, R e T) encontram-se em apêndice (apêndice IV).

De entre as várias medidas de desempenho directamente obtidas através das probabilidades de estado, optou-se por destacar, nesta secção, o comprimento médio da fila de espera e o número médio de equipamentos em falta na estação de trabalho.

Para melhor analisar o efeito da variação de cada parâmetro nas medidas de desempenho, apresentam-se diversos gráficos que mostram a evolução do comprimento da fila de espera (L_q) e do número de máquinas em falta na estação de trabalho (N_L).

- ***Efeitos da variação de T***

Como pode ser observado na tabela relativa à variação de T (em apêndice), as medidas de desempenho do sistema melhoram quando se aumenta a frequência de revisão (diminui-se T).

O tempo para realização de uma revisão é, em média, menor que o tempo de reparação. Por esse facto, o aumento da frequência de revisão origina uma diminuição no comprimento da fila de espera, tal como mostra a figura 27; embora o número de máquinas que chegam ao centro de manutenção seja o mesmo, o número de máquinas avariadas é inferior.

Uma vez que o desempenho do sistema melhora, sem necessidade de mais equipas de manutenção, concluiu-se que a realização de revisões periódicas torna o centro de manutenção mais eficiente.
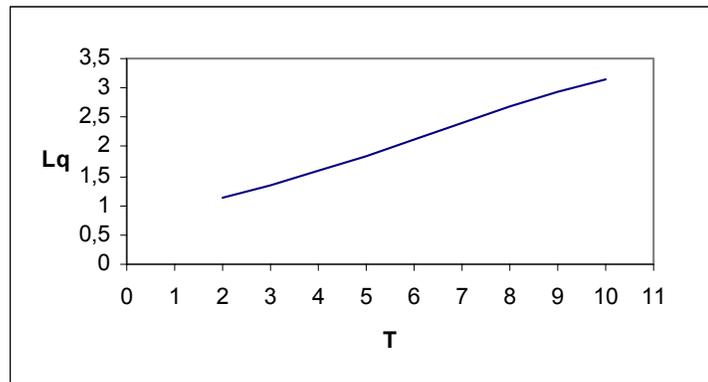
Figura 27: Gráfico L_q versus T

A figura 28 evidencia uma diminuição no número de máquinas em falta com o aumento da frequência de revisão. Esta variação corresponde à expectativa, uma vez que o aumento da frequência de revisão implica que a taxa de serviço no centro de manutenção seja globalmente superior.
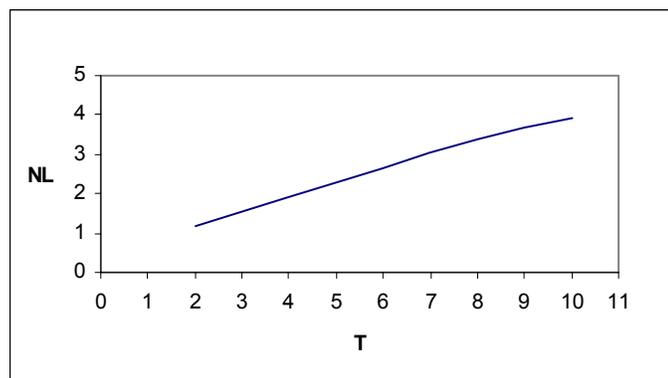
Figura 28: Gráfico N_L versus T

- ***Efeitos da variação de R***

Segundo pode ser observado na figura 29, o aumento do número de máquinas de reserva provoca uma diminuição no número de máquinas em falta na estação de trabalho, diminuindo assim a perda de produção do sistema.

Pode também verificar-se através da figura 30 que, ao mesmo tempo, o tamanho da fila de espera cresce. Este crescimento pode ser explicado pelo aumento da área de incidência das falhas e das revisões; isto é, com o aumento do número de máquinas de reserva, o número de máquinas activas passa a ser superior. O número de equipas de manutenção e respectiva eficiência não se alteram.
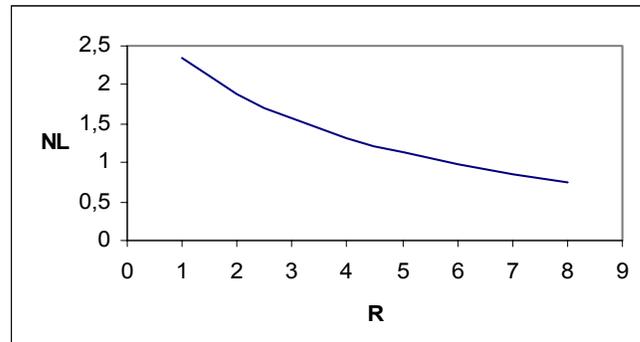
Figura 29: Gráfico N_L versus R
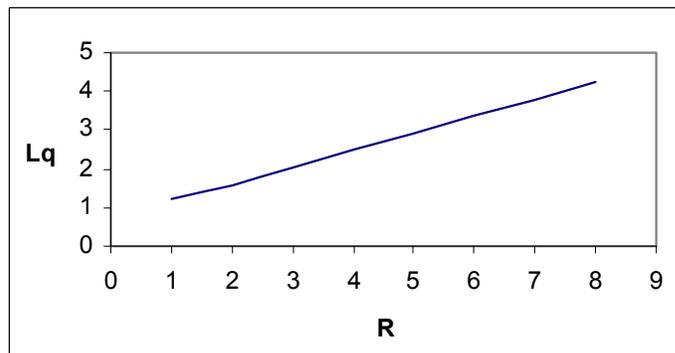
Figura 30: Gráfico L_q versus R

- ***Efeitos da variação de L***

O aumento do número de equipas de manutenção origina, evidentemente, uma diminuição no tamanho da fila de espera. Essa diminuição, que pode ser observada na figura 31, é acentuada na passagem de 2 equipas para 3, e significativamente inferior na passagem de 3 equipas para 4 e de 4 para 5. A partir da sexta equipa, o tamanho da fila de espera é praticamente nulo.

O número de máquinas em falta na estação de trabalho diminui com o aumento do número de equipas de manutenção até L=3. A partir de 3 equipas de manutenção, a variação no número de máquinas em falta não é significativa (ver figura 32).
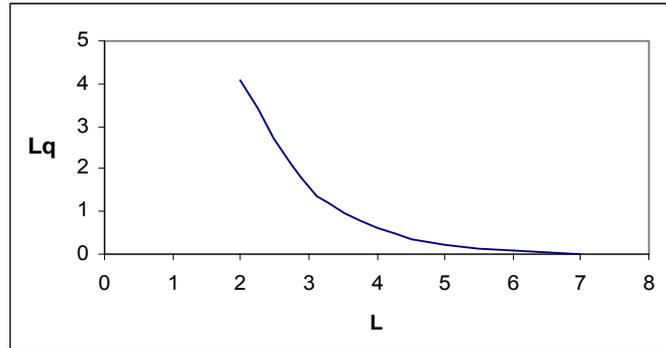
Figura 31: Gráfico L_q versus L
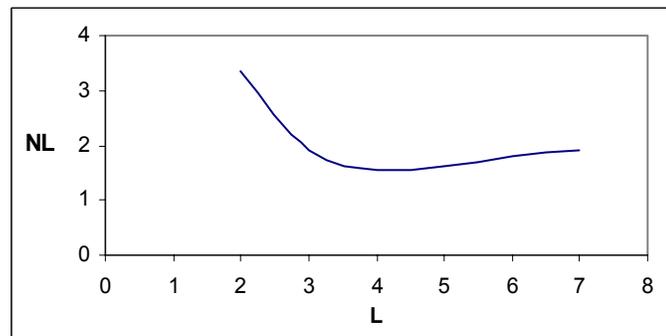
Figura 32: Gráfico N_L versus L

7.2.2. A Taxa Média de Ocupação

Para observar a evolução da taxa média de ocupação de um posto, fixou-se, em primeiro lugar, o intervalo entre revisões (T=4) e fez-se variar o número de equipas de manutenção e o número de máquinas de reserva e, em segundo lugar, fixou-se o número de equipas de manutenção e o número de máquinas de reserva (L=5 e R=6) e fez-se variar o intervalo entre revisões. Com os resultados obtidos, construíram-se os gráficos da figura 33 e da figura 34.

Na figura 33, pode observar-se que a taxa média de ocupação de um posto de trabalho num ciclo tem uma evolução positiva à medida que se aumenta o número de equipamentos de reserva e o número de equipas de manutenção. Essa evolução é mais acentuada quando está distante do valor 1 e menos acentuada na sua proximidade.
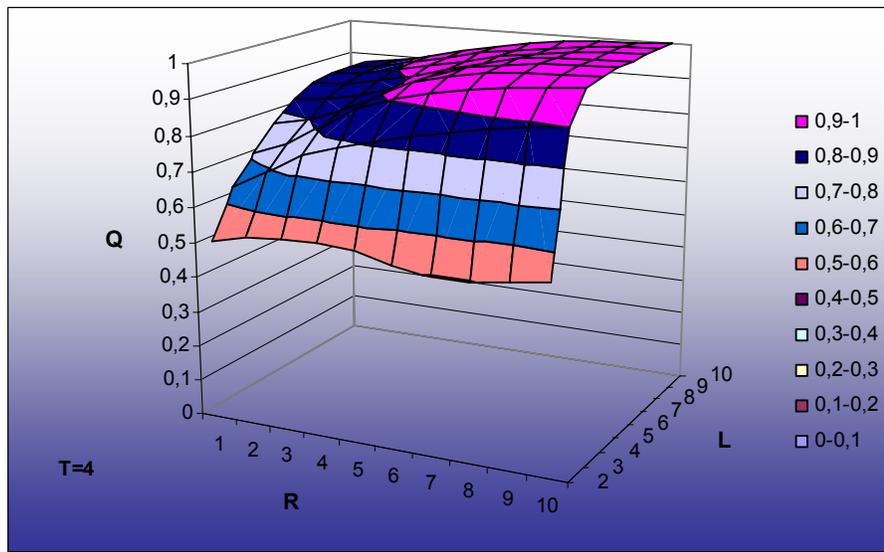
Figura 33: Gráfico Q versus R e L

A figura 34 mostra que um aumento na frequência de revisão origina um aumento na taxa de ocupação de um posto. Esta constatação corresponde ao que se verificou para o número de máquinas em falta na estação de trabalho.
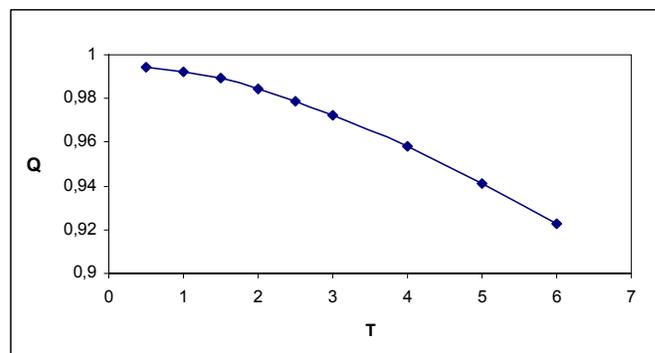
Figura 34: Gráfico Q versus T

7.2.3. O Custo de Manutenção

Os valores para os custos de manutenção utilizados nesta secção são apresentados na tabela que se segue.

CUSTOS		**Custo de falha-** C_f	100
Custo de reparação- C_{rep}	150	**Custo de perda de produção-** C_{pp}	9000
Custo de revisão- C_{rev}	100	**Custo de posse-** h	1500
Custo de substituição- C_s	100	**Custo fixo de mão de Obra-** k	900

Tabela 4: Custos de manutenção

Após a obtenção de diversos resultados para o custo total (CT), em que se manteve L e T (L=4 e T=1) constantes e atribuiram-se valores a R no intervalo de 1 a 11, construiu-se o gráfico da figura 35. O aspecto da curva CT versus R, para o exemplo apresentado, é muito semelhante para vários valores de L e de T.
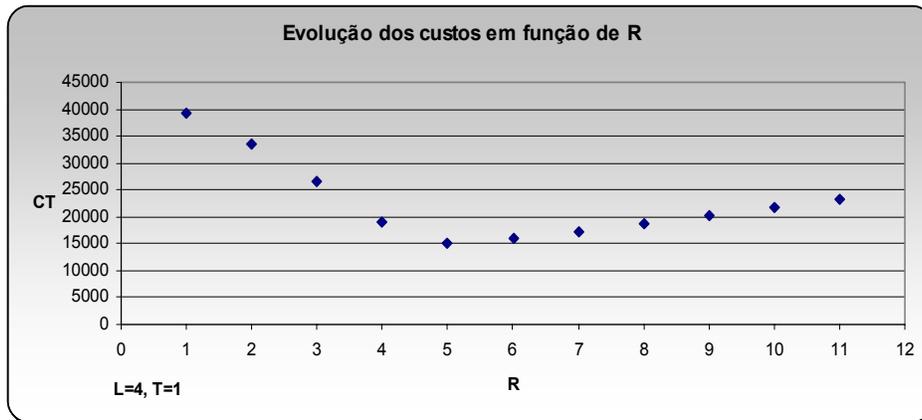
Figura 35: Gráfico CT versus R

Os gráficos das figuras 36 e 37 mostram, separadamente, cada uma das evoluções mencionadas; $R \leq L$ e $R > L$.
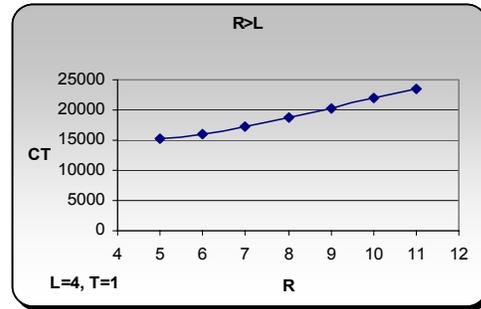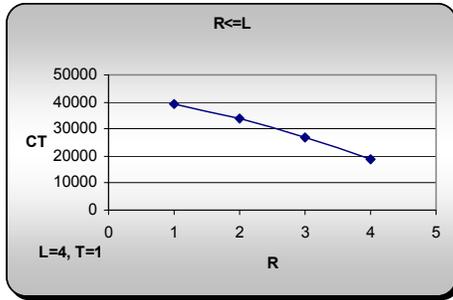
Figura 36:Gráfico CT versus R para R≤L

Figura 37:Gráfico CT versus R para R>L

Mantendo fixos R e T e fazendo variar L, obtemos o gráfico CT versus L (figura 38). Tal como o gráfico CT versus R, o gráfico CT versus L evidencia uma evolução diferente para as duas situações distintas; L<R e L≥R (figuras 39 e 40).
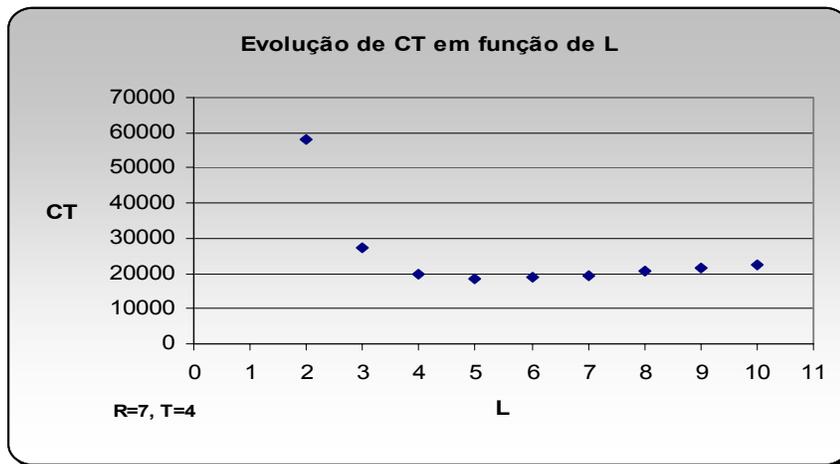
Figura 38:Gráfico CT versus L
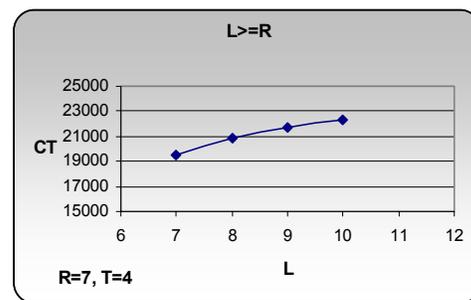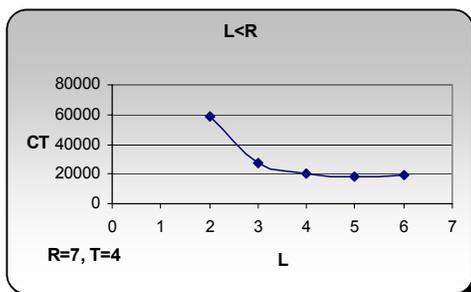
Figura 39: Gráfico CT versus L para L<R

Figura 40: Gráfico CT versus L para L≥R

Analisando diversas curvas de CT versus R e de CT versus L, nota-se que os efeitos no custo total destes dois parâmetros estão correlacionados. Por esta razão, construiu-se um gráfico tridimensional que mostra o efeito conjunto, no custo total, das duas variáveis; número de equipamentos de reserva e número de equipas de manutenção.
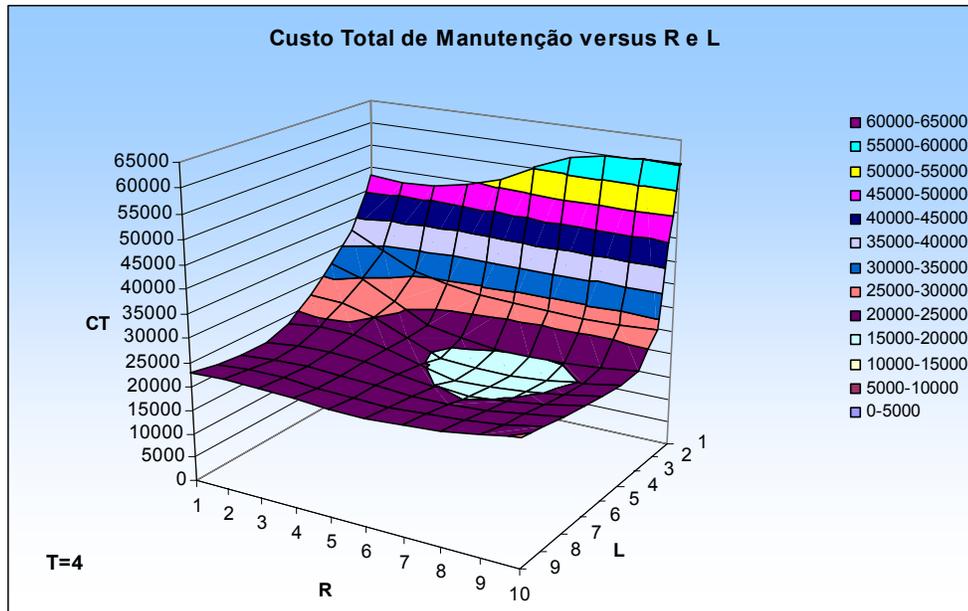
Figura 41: Gráfico CT versus R e L

O gráfico resultante é uma superfície convexa onde se pode observar a região que corresponde à melhor combinação de R e L (para T=4).

O gráfico CT versus T, que se apresenta na figura 42, mostra a existência de um mínimo, para L e R fixos. Constatou-se que esse mínimo varia com os valores definidos para L e para R.
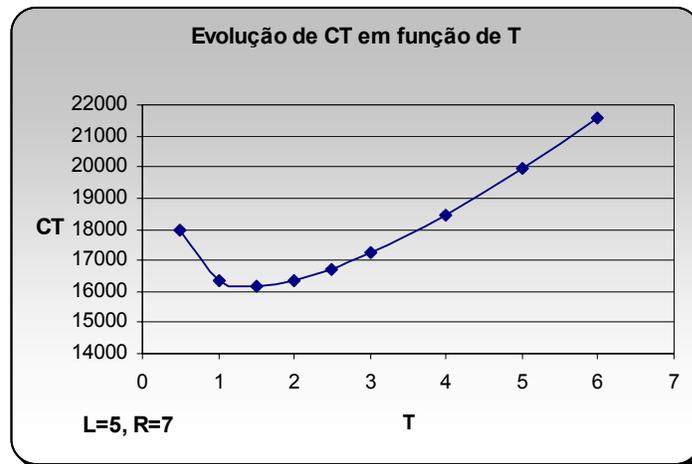
Figura 42: Gráfico CT versus T

Reproduzindo o gráfico tridimensional CT versus R e L para T=1 (figura 43), pode verificar-se que o custo do sistema apresenta, na globalidade, valores inferiores em comparação com os valores obtidos para T=4 (figura 41).
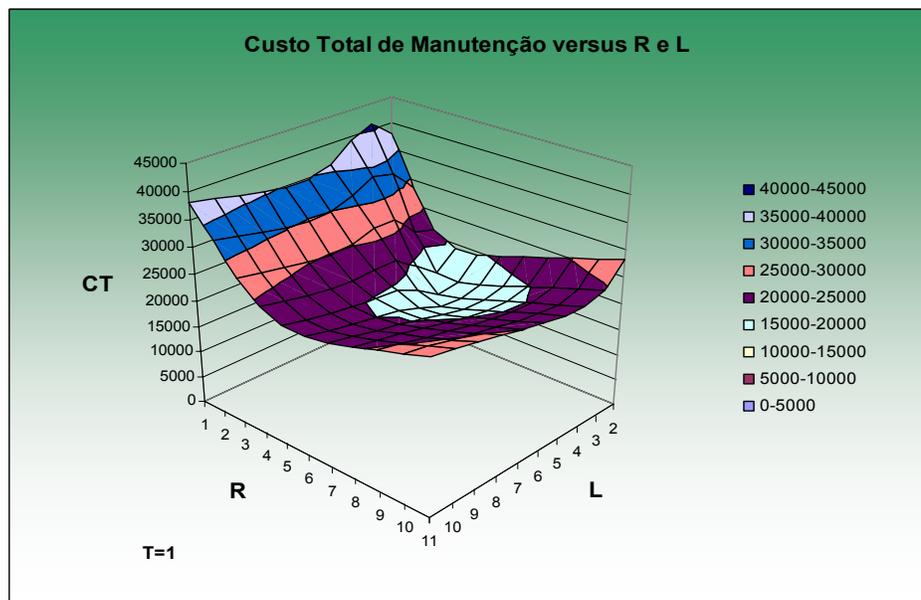
Figura 43: Gráfico CT versus R e L

CAP 8. METODOLOGIA DE PESQUISA DA COMBINAÇÃO MAIS ECONÓMICA DOS PARÂMETROS

O objectivo deste capítulo é definir uma metodologia para encontrar a combinação de menor custo de manutenção para o número de equipamentos de reserva (R), para o número de equipas de manutenção (L) e para o intervalo entre revisões (T) de um sistema composto por M equipamentos activos e idênticos.

Para resolver o problema da pesquisa da melhor solução é necessário, em primeiro lugar, identificar as características que nos permitem encontrar um algoritmo ou método de pesquisa já existente que se possa adaptar ao problema em estudo. A primeira secção deste capítulo caracteriza o problema a resolver e determina o algoritmo a utilizar na procura da melhor solução.

Na segunda secção, o algoritmo escolhido é modificado de forma a reflectir as particularidades do problema.

Na terceira e última secção, apresenta-se um exemplo de aplicação do algoritmo modificado, mostrando os vários passos necessários para obter a melhor solução para o problema definido.

8.1. Caracterização do Problema e Escolha do Algoritmo

É importante salientar que a expressão do custo total de manutenção não é uma função explícita relativamente a R, L e T, o que impossibilita a utilização de gradientes ou derivadas. Apenas poderão ser utilizados métodos de optimização numérica que utilizam unicamente os valores da função que se pretende optimizar.

Outra particularidade de elevada relevância neste processo é o facto das variáveis de decisão não serem todas discretas ou todas contínuas. O problema é misto. R e L são variáveis discretas (inteiras e positivas) e T é uma variável contínua (positiva). Este facto implica que algoritmos como o de Rosenbrock e o de Nelder-Mead (embora não utilizem derivadas nem gradientes) não podem ser utilizados pelo facto de serem destinados à optimização de funções cujas variáveis tomam valores reais.

Os algoritmos evolucionários, tais como os algoritmos genéticos, o algoritmo do arrefecimento simulado (*simulated annealing*) e a pesquisa Tabu poderiam ser utilizados neste problema porque são aplicáveis a problemas com variáveis discretas e contínuas e não utilizam derivadas nem gradientes. Os algoritmos genéticos partem de um conjunto de soluções possíveis e geram, ao longo de várias iterações, muitas outras soluções. O número de avaliações da função a optimizar é geralmente elevado. O algoritmo do arrefecimento simulado e a pesquisa Tabu são métodos de pesquisa na vizinhança. O algoritmo do arrefecimento simulado tem como principal característica, a capacidade de escapar a óptimos locais por permitir que o valor da função a optimizar piore. A pesquisa Tabu recorre à memória, para evitar voltar a visitar soluções já exploradas. Os três métodos citados são designados de Meta-heuristicas e têm a particularidade de procurar evitar a retenção em mínimos locais e explorar as melhores áreas do espaço de soluções.

Através de uma análise ao problema que se pretende revolver, verifica-se que a função custo tem, no máximo, dois mínimos - um correspondendo ao caso em que $L<R$ e o outro, correspondendo ao caso em que $R \leq L$. A função custo é convexa em ambos os casos. Esta afirmação assenta nos seguintes factores:

- um aumento de R reduz os custos de perda de produção mas aumenta o custo de posse;

- um aumento de L reduz os custos de perda de produção mas aumenta o custo com a mão de obra;

- Uma diminuição em T reduz os custos de falha, os custos de reparação e os custos de perda de produção, mas aumenta os custos de revisão.

Se o problema for dividido em dois subproblemas ($L<R$ e $R \leq L$), tal como foi feito na modelação do sistema, deixarão de existir mínimos locais. Haverá um mínimo global em cada subproblema. Não havendo mínimos locais, o trabalho de pesquisa da melhor solução fica simplificado. Através de um método de pesquisa na vizinhança simples é possível identificar e seguir a direcção que nos leva ao óptimo.

Os métodos de procura na vizinhança são procedimentos iterativos, em que uma vizinhança N(x) é definida para cada solução possível x e a próxima solução y é procurada na vizinhança N(x). Dessa forma, optou-se pelo método de Descida ("*Descent method*"), que é o método mais simples de procura na vizinhança.

<u>Método de Descida</u>

Passo1: escolher uma solução inicial x no espaço de soluções S

Passo 2: encontrar o melhor y em N(x) (i.e. tal que $f(y) \leq f(k)$ para qualquer k em N(x))

Passo 3: se $f(y) \geq f(x)$ então parar senão x=y e ir para passo 2

O método de Descida aplicado separadamente aos subproblemas ($L<R$ e $R \leq L$) dará origem à identificação de dois mínimos, que serão comparados para se seleccionar a melhor solução para o problema. O método de Descida, assim utilizado, será mais rápido na obtenção da solução do que o método do arrefecimento simulado ou da pesquisa tabu, porque o número de vezes que o custo de manutenção terá de ser calculado é inferior.

8.2. Adaptação do Algoritmo ao Problema

Para se poder utilizar o método de Descida é necessário, por um lado, definir as soluções vizinhas de uma determinada solução e, por outro lado, decidir sobre quais os valores a atribuir às três variáveis (R, L e T) para definir a solução inicial do problema. Na definição das soluções vizinhas tornou-se evidente a necessidade de alterar o critério de paragem do algoritmo, devido à variável contínua do problema (T). Também devido a T, foi necessário alterar a forma do algoritmo se aproximar da melhor solução no decorrer das suas iterações.

8.2.1. As Soluções Vizinhas

As soluções vizinhas podem ser geradas, alterando as variáveis inteiras, R e L, de uma unidade:

1- $R \leftarrow R-1$,

2- $R \leftarrow R+1$

3- $L \leftarrow L-1$

4- $L \leftarrow L+1$

O mesmo pode ser feito em relação a T, definindo Δ como a variação na variável T que dá origem a novas soluções para o problema.

5- $T \leftarrow T-\Delta$

6- $T \leftarrow T+\Delta$

Na proximidade do mínimo da função custo, o valor de Δ deverá ser cada vez mais pequeno, de forma a permitir obter a precisão desejada.

No caso de se progredir de uma solução para outra devido à alteração da variável R ou L, não será necessário calcular uma das soluções vizinhas (R-1 ou R+1; L-1 ou L+1), já que uma das soluções corresponderá à solução calculada na iteração anterior; o número de soluções vizinhas a avaliar será, no máximo, seis. Por outro lado, na

definição das soluções vizinhas, há que ter em conta a fronteira do espaço de soluções, mais especificamente o limite entre cada subproblema.

Podem verificar-se várias situações:

1- Após a diminuição de R em 1 unidade, a solução vizinha gerada pelo aumento de R em 1 unidade corresponde à melhor solução da iteração anterior.
2- Após o aumento de R em 1 unidade, a solução vizinha gerada pela diminuição de R em 1 unidade corresponde à melhor solução da iteração anterior.
3- Após a diminuição de L em 1 unidade, a solução vizinha gerada pelo aumento de L em 1 unidade corresponde à melhor solução da iteração anterior.
4- Após o aumento de L em 1 unidade, a solução vizinha gerada pela diminuição de L em 1 unidade corresponde à melhor solução da iteração anterior.

Subproblema 1 (L<R)

1- quando se gera uma solução vizinha, diminuindo R de 1 unidade, tem de se verificar que L<R, de forma a garantir que a solução é válida para o subproblema.
2- O mesmo terá que acontecer, quando se gera uma solução vizinha acrescentando uma unidade a L.

Subproblema 2 (R≤L)

1- quando se gera uma solução vizinha, aumentando R de 1 unidade, tem de se verificar que R≤L, de forma a garantir que a solução é válida para o subproblema.
2- O mesmo terá que acontecer quando se gera uma solução vizinha diminuindo L de uma unidade.

8.2.2. O Critério de Paragem

Devido ao facto de existir uma variável contínua envolvida no problema - a variável T, há necessidade de definir um critério de paragem que considere a precisão pretendida para essa variável. Como já foi referido, o valor de Δ deverá ser alterado de forma a permitir alcançar, da forma mais eficiente, a melhor solução. Na proximidade da solução de menor custo, o valor de Δ deverá ser cada vez mais pequeno. No entanto, não valerá a pena progredir no espaço de soluções, se a variação no intervalo de revisões não for tecnicamente viável. Dessa forma, a pesquisa terminará quando se atingir a precisão desejada para T e quando não existirem soluções vizinhas com valor inferior para a função custo. A pesquisa também poderá ser dada como terminada, se a última solução encontrada na vizinhança tiver um valor inferior para a função custo, desde que a variação nos custos não seja significativa e tenha sido atingida a precisão desejada para T.

Assim, consideram-se como parâmetros de entrada, a precisão desejada para T ($\Delta_{desejado}$) e para a função custo f(x) ($\Delta f_{desejado}$).

8.2.3. A Solução Inicial

A rapidez de obtenção da solução óptima dependerá da solução de partida. Quando não é possível ter uma ideia sobre qual poderá ser a solução óptima, ou em que região do espaço de soluções se situará, parece sensato iniciar a pesquisa numa solução situada no centro do espaço de soluções. O espaço a percorrer será, dessa forma, minimizado.

A divisão do problema em dois subproblemas implica que o espaço de soluções possíveis fique também dividido. Sendo assim, terá que ser especificada uma solução inicial para cada um dos dois subproblemas, atribuindo, em cada caso, valores para as três variáveis de decisão do problema.

A solução L=M não parece ser uma solução economicamente viável, porque acarreta um custo de mão de obra elevado. No entanto, para sistemas em que os custos de perda de produção são elevados relativamente ao custo de mão de obra, esta solução pode não ser completamente rejeitada. Uma vez que em muitos casos a solução L=M é uma solução extrema, optou-se por considerar para a solução inicial L_i=M/2.

Se o problema não fosse subdividido, pensa-se que uma opção correcta para o número de equipamentos de reserva seria R=L. Esta solução que corresponde à possibilidade de substituição de todos os equipamentos submetidos em simultâneo a uma intervenção. Se o custo de posse dos equipamentos de reserva fosse baixo em relação aos restantes custos, a solução extrema resultante consistiria em dispor de um número de equipamentos de reserva que cobrisse todos os equipamentos na estação de trabalho (M). Por esta razão, a solução R=L=M/2 é uma solução que se encontra numa posição central, no centro do espaço de soluções possíveis.

Uma vez que o problema tem que ser subdividido, considera-se R_i= L+1 para o caso em que L<R e R_i= L-1 para o caso em que $R \leq L$.

Quanto ao intervalo entre revisões T, optou-se pela solução T_i=MTBF (ou $T=1/\lambda$), que corresponde a evitar em média 36,8% das avarias, através da realização de revisões. Este resultado é obtido utilizando a expressão 4.2.

$\alpha = \exp(-\lambda * 1/\lambda) = \exp(-1) = 0{,}368$

8.2.4. O Algoritmo Modificado

Nos casos em que os custos de revisão são elevados, o intervalo entre revisões poderá ser superior ao MTBF. A função α é enviesada: uma variação em T não tem o mesmo efeito na percentagem de avarias à esquerda e à direita do MTBF. Abaixo do MTBF, uma variação em T

provoca uma variação em α bastante superior, como pode ser observado na tabela 5.

T/MTBF	0,1	0,2	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8
α (%)	90	81	60	36,8	13,5	4,9	1,8	0,6	0,25	0,91	0,03

Tabela 5: Melhoria originada na taxa de avarias versus T

Sendo assim, nos casos em que a solução óptima corresponde a um valor de T inferior ao MTBF, a atribuição de um valor igual a MTBF/2 para Δ na primeira iteração e a divisão sucessiva de Δ por 2 (sempre que a melhor solução for gerada pela alteração da variável T) irá conduzir rapidamente a pesquisa para o melhor valor da variável (tendo em conta a precisão pretendida).

Acima do MTBF, é necessário acelerar o processo de procura. Se Δ fosse sucessivamente dividido por 2, a aproximação do óptimo tornar-se-ia cada vez mais lenta. Por esse facto, no passo 3 do algoritmo modificado que se apresenta a seguir, duplica-se Δ sempre que se verificam dois movimentos na mesma direcção acima do MTBF, para permitir uma aproximação mais rápida da solução. A precisão desejada para T será posteriormente cumprida dividindo sucessivamente Δ por 2, após se ter verificado que o menor valor da função, encontrado na vizinhança, é superior ou igual ao valor mínimo encontrado até àquele instante ($f(y) \geq f(x)$).

Definindo S como o espaço de soluções possíveis, $\underset{\sim}{x}$ = (R, L, T) como um vector solução, N($\underset{\sim}{x}$) como o conjunto de soluções na vizinhança de $\underset{\sim}{x}$ e f($\underset{\sim}{x}$) como a função custo, construiu-se um novo algoritmo adaptado ao problema, que se baseia no algoritmo descrito anteriormente:

Algoritmo modificado

Passo 1: Escolher uma solução inicial $\underset{\sim}{x}$ em S

Passo 2: Encontrar o melhor y na vizinhança N($\underset{\sim}{x}$) (i.e. tal que $f(\underset{\sim}{y}) \leq f(\underset{\sim}{k})$ para qualquer k em N($\underset{\sim}{x}$))

Passo 3:

Se $f(\underset{\sim}{y}) \geq f(\underset{\sim}{x})$ então

Se $\Delta \leq \Delta_{desejado}$ então parar

Caso contrário $\Delta = \Delta/2$ e ir para o passo 2.

Caso contrário

Se $f(\underset{\sim}{x}) - f(\underset{\sim}{y}) \leq \Delta f_{desejado}$ e $\Delta \leq \Delta_{desejado}$ então $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$ e parar

Caso contrário

$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y}$

Se $\underset{\sim}{y}$ foi gerado por uma variação em T, então

se T>MTBF e se a variação em T tem a mesma direcção do que a variação originada em T na iteração anterior, então $\Delta = \Delta * 2$,

Caso contrário

$\Delta = \Delta/2$,

ir para o passo 2.

É de notar que, depois de se verificar que $f(\underset{\sim}{y}) \geq f(\underset{\sim}{x})$ e $\Delta > \Delta_{desejado}$, as soluções vizinhas a analisar no passo 2 são apenas duas, resultantes da variação em T.

8.3. Exemplo de Aplicação

Para testar o algoritmo construído utilizou-se o sistema que foi objecto de análise no capítulo 7. Definiram-se, então, a precisão pretendida para o intervalo entre revisões e as soluções iniciais para cada subproblema:

$\Delta_{desejado} = 0,1$

Solução Inicial do subproblema 1 (R>L):

L_i= M/2= 5

R_i= L+1= 6

T_i= 1/0,3= 3,33

Solução Inicial do subproblema 2 ($R \leq L$):

L_i= M/2= 5

R_i= L-1= 4

T_i= 1/0,3= 3,33

O valor de Δ para a primeira iteração é:

Δ= 3,33/2=1,67

Nas tabelas que se seguem apresentam-se as iterações que levam à obtenção da solução óptima.

- ***Subproblema 1 (R>L)***

Iteração Nº=1	Solução Inicial: R= 6; L= 5; T= 3,33			f(x)= 17607,76
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
7	5	3,33	17835,39	Δ= 1,67
6	4	3,33	18355,64	Δf= 1640,86
6	5	1,66	16175,23	
6	5	5	19962,66	
Iteração Nº=2	Melhor solução: R= 6; L= 5; T= 1,66			f(x)= 16175,23
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
7	5	1,66	17082,02	Δ= 0,84
6	4	1,66	15675,74	Δf= 499,49
6	5	0,82	16647,4	
6	5	2,5	16718,57	
Iteração Nº=3	Melhor solução: R= 6; L= 4; T= 1,66			f(x)= 15675,74
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
5	4	1,66	15582,58	Δ= 0,84
7	4	1,66	16774,06	Δf= 93,16
6	3	1,66	16723,14	
6	5	1,66	16175,23*	
6	4	0,82	16225,23	
6	4	2,5	16622,03	
Iteração Nº=4	Melhor solução: R= 5; L= 4; T= 1,66			f(x)= 15582,58
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
6	4	1,66	15675,74*	Δ= 0,84
5	3	1,66	16581,93	Δf= 289,34
5	4	0,82	15293,24	
5	4	2,5	17098,73	

Iteração Nº=5	Melhor solução: R= 5; L= 4; T= 0,82			f(x)= 15293,24
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
6	4	0,82	16225,23	Δ= 0,42
5	3	0,82	15784,48	Δf= 120,54
5	4	0,40	17135,75	
5	4	1,24	15172,86	
Iteração Nº=6	Melhor solução: R= 5; L= 4; T= 1,24			f(x)= 15172,86
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
6	4	1,24	15653,52	Δ= 0,21
5	3	1,24	15694,54	Δf= 38,44
5	4	1,03	15134,42	
5	4	1,45	15332,54	
Iteração Nº=7	Melhor solução: R= 5; L= 4; T= 1,03			f(x)= 15134,42
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
6	4	1,03	15838,77	Δ= 0,11
5	3	1,03	15586,64	Δf= 2,04
5	4	0,92	15185,92	
5	4	1,14	15136,46	
Iteração Nº=8	Melhor solução: R= 5; L= 4; T= 1,03			f(x)= 15134,42
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
6	4	1,03	15838,77*	Δ= 0,06
5	3	1,03	15586,64*	Δf= 4,58
5	4	0,97	15154,56	
5	4	1,09	15129,84	

*determinado no passo anterior

Para o caso em que L<R, o mínimo corresponde a R= 5, L=4 e T=1,09, solução que origina um custo total de 15129,84 unidades monetárias.

- ***Subproblema 2 (R≤L)***

Iteração Nº=1	Solução Inicial: R= 4; L= 5; T= 3,33			f(x)= 21226,68
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
3	5	3,33	24308,91	
5	5	3,33	18167,34	Δ= 1,67
4	4	3,33	20610,39	Δf= 3059,34
4	6	3,33	21642,67	
4	5	1,66	20528,27	
4	5	5	23667,08	
Iteração Nº=2	Melhor solução: R= 5; L= 5; T= 3,33			f(x)= 18167,34
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
4	5	3,33	21226,68	Δ= 1,67
5	6	3,33	19695,72	Δf= 1198,95
5	5	1,66	16968,39	
5	5	5	20601	
Iteração Nº=3	Melhor solução: R= 5; L= 5; T= 1,66			f(x)= 16968,39
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	
4	5	1,66	20528,27	Δ= 0,84
5	6	1,66	18926,03	Δf= 335,26
5	5	0,82	18130,56	
5	5	2,5	17303,65	
Iteração Nº=4	Melhor solução: R= 5; L= 5; T= 1,66			f(x)= 16968,39
Vizinhos				
R	L	T	f(x)	Δ= 0,42
5	5	1,24	17218,24	Δf= 71,08
5	5	2,08	17039,47	

Iteração Nº=5	Melhor solução: R= 5; L= 5; T= 1,66			f(x)= 16968,39
Vizinhos				Δ= 0,21 Δf= 4,35
R	L	T	f(x)	
5	5	1,45	17040,46	
5	5	1,87	16974,04	
Iteração Nº=6	Melhor solução: R= 5; L= 5; T= 1,66			f(x)= 16968,39
Vizinhos				Δ= 0,11 Δf= 5,44
R	L	T	f(x)	
5	5	1,55	16994,98	
5	5	1,77	16962,95	
Iteração Nº=7	Melhor solução: R= 5; L= 5; T= 1,77			f(x)= 16962,95
Vizinhos				Δ= 0,06 Δf= 0,52
R	L	T	f(x)	
4	5	1,77	20451,41	
5	6	1,77	18914,48	
5	5	1,71	16963,47	
5	5	1,83	16966,71	

Para o caso em que R≤L, o mínimo corresponde a R= 5, L=5 e T=1.77, solução que origina um custo total de 16962,95 unidades monetárias. Sendo o custo total deste subproblema, superior ao mínimo encontrado para o problema 1, concluí-se que a combinação óptima corresponde à solução encontrada no problema 1.

CAP 9. Conclusão e Trabalhos Futuros

A manutenção consiste num conjunto de acções cujo objectivo é assegurar ou restabelecer o funcionamento de um item de forma a que este desempenhe as funções requeridas. A fiabilidade de equipamentos reparáveis compostos por componentes ou sub-sistemas com fiabilidade decrescente pode ser melhorada através da realização de acções de manutenção preventiva, que envolvem a substituição dos componentes ou dos sub-sistemas por outros com fiabilidade superior.

Os modelos desenvolvidos ao longo deste trabalho permitem minimizar o custo de manutenção de um sistema formado por um determinado número de equipamentos independentes, activos e idênticos, apoiado por equipamentos de reserva e equipas de manutenção, submetidos a acções de manutenção preventiva ou revisões.

Nenhum dos modelos encontrados na literatura, na área da optimização do desempenho deste tipo de sistemas, considera em simultâneo a determinação das três variáveis: número de equipas de manutenção, número de equipamentos de reserva e intervalo entre revisões. A complexidade do sistema é frequentemente ultrapassada pela consideração da existência de apenas uma equipa de manutenção ou de apenas um equipamento na estação de trabalho, ou pela consideração de uma capacidade de manutenção ilimitada.

No decorrer deste trabalho, foram introduzidas várias medidas de desempenho para além do custo, cujas expressões foram determinadas com base no trabalho efectuado para determinar os custos de manutenção. A optimização do sistema passou pela

minimização do custo de manutenção. Esta é, na maioria dos casos, a medida de desempenho de maior relevância. No entanto, nada impede que se optimize o desempenho do sistema com base noutras medidas tais como o número de equipamentos em falta, a taxa média de ocupação de um posto, etc..

Minimizar o número de equipamentos em falta corresponde a procurar obter um número médio de equipamentos activos próximo de M; maximizar a taxa média de ocupação de um posto corresponde a alcançar uma taxa média próxima de 1. Como foi possível verificar no capítulo relativo à análise de resultados, a variação marginal destas medidas, originada pela variação de uma das variáveis, é cada vez menor para valores próximos do óptimo. Por esta razão, pensa-se que estas medidas devem de ser utilizadas como restrições para o problema e não como função a optimizar. Por exemplo, pode ser estabelecido um valor mínimo para a taxa média de ocupação de um posto. O problema seria representado da seguinte forma:

$$\text{Min CT} = \text{M}.\frac{B}{D} + h*R + k*L$$

Sujeito a

$$Q \geq \psi \ ,$$

em que ω representa o valor mínimo requerido para a taxa média de ocupação.

Pode ainda ser estabelecido um valor mínimo para o número médio de equipamentos activos:

$$\text{Min CT} = \text{M}.\frac{B}{D} + h*R + k*L$$

Sujeito a

$$M - N_L \geq \omega \ ,$$

em que ψ representa o número médio mínimo de equipamentos activos.

O número médio de equipamentos activos, determinado através da diferença ($M-N_L$), dá indicação sobre o *output* que se pode esperar do sistema em termos de produção ou serviço. Outra medida que poderia ser útil para planear as tarefas a desempenhar pelos equipamentos é a disponibilidade do sistema na sua capacidade máxima. Esta medida poderia ser determinada com base nas probabilidades de estado. No entanto, comparando ambas as medidas, parece evidente que, para este sistema, a primeira é mais útil do que a segunda.

O problema tratado neste trabalho é um problema complexo, que se pode tornar ainda mais complexo com a introdução de mais variáveis ou com a consideração de outros factores.

Vários factores podem influenciar o desempenho dos *Float systems,* nomeadamente:

- a rapidez ou eficiência das reparações e revisões;
- o escalonamento da mão de obra de manutenção para realizar a reparação ou revisão;
- a possibilidade de avaria dos equipamentos em reserva;
- a realização de operações de conservação ou manutenção aos equipamentos de reserva.

Para sistemas cujo custo de posse de equipamentos de reserva é elevado, prevê-se que a taxa de utilização dos equipamentos de reserva seja elevada e que, por conseguinte, o tempo durante o qual estes equipamentos permanecem parados é relativamente curto, sendo diminuta a possibilidade de avaria e de deterioração.

A manutenção preventiva que se propôs para o sistema é uma manutenção preventiva temporal e individual, que se realiza depois do equipamento permanecer em funcionamento durante um intervalo de

tempo constante. Este tipo de manutenção e os custos que implica poderiam ser comparados com uma política de manutenção preventiva em bloco, em que a intervenção preventiva é realizada em simultâneo para todos os equipamentos e obriga à paragem de todo o sistema. Naturalmente, nesta situação, a necessidade de equipas de manutenção seria maior num determinado instante ou intervalo de tempo. Para satisfazer a elevada procura seria útil analisar a possibilidade de recurso à subcontratação do serviço.

Para a situação em estudo, foi possível satisfazer o objectivo proposto através da construção de um modelo analítico. No entanto, para situações mais complexas, o recurso à simulação será a opção a seguir. O modelo de simulação, que se poderá construir no futuro, deverá permitir uma aplicação mais alargada, podendo incluir um ou mais factores adicionais. Dessa forma, retirando o efeito dos factores adicionais considerados, os resultados obtidos a partir deste último modelo poderão ser comparados com os resultados obtidos através do modelo proposto neste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

B. F. Arnold (1992), "An economic inspection model for multi-component system," *International Journal of Quality and Reliability Management*, vol. 9, pp. 34-41.

H. Ascher & H. Feingold (1984), *Repairable Systems Reliability: Modeling, Inference, Misconceptions and their Causes*, vol. 7. Texas: Marcel Dekker.

H. E. Ascher & C. K. Hansen (1998), *Spurous exponentiality observed when incorrectly fitting a distribution to nonstationary data*, vol. 47.

M. N. Azaiez (2002), "A Multi-attribute preventive replacement model," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 8, pp. 213-225.

K. Bahrami-G, J. W. H. Price, et al. (2000), "The constant-interval replacement model for preventive maintenance," *International Journal of Quality & Maintenance Management*, vol. 17, pp. 822-838.

K. Bahrami-Ghasrchami, J. W. H. Price, et al. (1998), "Optimum inspection frequency for manufacturing systems," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 15, pp. 250-258.

M. J. C. Baker (1990), "How often should a machine be inspected?," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 7, pp. 14-18.

R. E. Barlow & L. Hunter (1960), "Optimum preventive maintenance policies," *Operations Research*, vol. 8, pp. 90-100.

R. E. Barlow & F. Proschan (1965), *Mathematical theory of reliability*. New York: John Wiley and Sons.

F. Beichelt (2001), "A replacement policy based on limiting the cumulative maintenance cost," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 18, pp. 76-83.

M. Ben-Daya & A. S. Alghamdi (2000), "On an imperfect maintenance model," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 17, pp. 661-670.

M. Ben-Daya & M. Hariga (1998), "A maintenance inspection model: optimal and heuristic solutions," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 15, pp. 481-488.

G. Bohoris & A. L. F. Leitão (1991), "Proportional Hazards modelling versus two-sample tests," *Quality and Reliability Engineering International*, vol. 7, pp. 393-402.

G. A. Bohoris (1996-a), "Trend testing in reliability engineering," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 13, pp. 45-54.

G. A. Bohoris (1996-b), "Trend testing for complex repairable systems," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 13, pp. 18-28.

M. Brown & F. Proschan (1983), "Imperfect repair," *Journal of Applied Probability*, vol. 20, pp. 851-859.

J. D. Campbell (1995), "Outsourcing in maintenance management: a valid alternative to self position," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 1, pp. 18-24.

M.-C. Chen & H.-Y. Tseng (2003), "An approach to design of maintenance float systems," *Integrated Manufacturing Systems*, vol. 14, pp. 458-467.

S. H. Choi & J. S. L. Lee (2000), "Computational algorithms for modeling unreliable manufacturing systems based on Markovian property," *European Journal of Operational Research*, vol. 133, pp. 667-684.

K.-J. Chung & P.-S. Ting (1994), "An algorithm to determine optimal inspection policies for a multi-component system," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 11, pp. 66-74.

R. Cléroux, S. Dubuc, et al. (1979), "The age replacement problem with minimal repair and random repair costs," *Operations Research*, vol. 27, pp. 1158-1167.

R. Cléroux & M. Hanscom (1974), "Age replacement with ajustement and depreciation costs and interest Charges," *Technometrics*, vol. 16, pp. 235-239.

D. R. Cox & E. J. Lewis (1966), *The Statistical Analysis of Series of Events*. London: Methuen.

L. H. Crow, "Reliability analysis for complex repairable systems," in *Reliability and Biometry: Statistical Analysis of Lifelength, SIAM*, F. Proschan & R. J. Serfling, Eds. Philadelphia: PA, 1974, pp. 379-410.

M. E. Cunha, J. Á. A. Lopes, et al. (2001), "Modelo de Simulação para a Gestão de um Sistema Multi-escalão de Artigo Reparáveis," *Investigação Operacional*, vol. 21, pp. 123-137.

A. Díaz & M. C. Fu (1997), "Models for multi-echelon repairable item inventory systems with limited repair capacity," *European Journal of Operational Research*, vol. 97, pp. 480-492.

T. Dohi, A. Ashioka, et al. (2001), "Optimizing the repair-time limit replacement schedule with discounting and imperfect repair," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 7, pp. 71-84.

J. Donovan & E. Murphy (1999), "Reliability growth- a new grafical model," *Quality and Reliability Engineering International*, vol. 15, pp. 167-74.

J. Donovan & E. Murphy (2002), "Simulation and comparison of reliability growth models," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 19, pp. 259-271.

R. F. Drenick (1960), "The failure law of complex equipment," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 8, pp. 680-690.

R. W. Drinkwater & N. A. J. Hastings (1967), "An economic replacement policy," *Operational Research Quarterly*, vol. 18, pp. 121-138.

J. T. Duane (1964), "Learning curve approach to reliability monitoring," *IEEE Trans. Aerospace*, vol. AS-2, pp. 553-66.

S. O. Duffuaa & M. Ben-Daya (1994), "An extended model for joint overhaul scheduling problem," *International Journal of Operations & Production Management*, vol. 14, pp. 37-43.

B. Fox (1966), "Age replacement with discounting," *Operations Research*, vol. 14, pp. 533-537.

A. M. Gento (2004), "Decision rules for a maintenance database," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 10, pp. 210-220.

G. J. Glasser (1967), "The age replacement problem," *Technometrics*, vol. 9, pp. 83-91.

A. Grall, L. Dieulle, et al. (2002), "Continuous-time predictive-maintenance scheduling for a deteriorating system," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 51.

D. Gross & C. M. Harris (1998), *Fundamentals of Queueing Theory*, Third Edition ed. USA.

R. Gupta & S. Z. Mumtaz (1996), "Stochastic analysis of a two-unit cold standby system with maximum repair time and correlated failures and repair," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 2, pp. 66-76.

S. M. Gupta (1997), "Machine interference problem with warm spares, server vacations and exhaustive service," *Performance Evaluation*, vol. 29, pp. 195-211.

U. C. Gupta & T. S. Rao (1996), "On the M/G/1 machine interference model with spares," *European Journal of Operational Research*, vol. 89, pp. 164-171.

V. Gupta & T. Rao (1996), "On the M/G/1 machine interference model with spares," *European Journal of Operational Research*, vol. 89, pp. 164-171.

M. Hariga (1994), "A deterministic Maintenance-scheduling problem for a group of non-identical machines," *International Journal of Operations & Production Management*, vol. 14, pp. 27-36.

N. A. Hastings (1969), "The repair limit replacement method," *Operational Research Quarterly*, vol. 20, pp. 337-349.

M. M. Hosseini, R. M. Kerr, et al. (2000), "An inspection model with minimal and major maintenance for a system with deterioration and Poisson failures," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 49, pp. 88-98.

A. K. S. Jardine (1973), *Maintenance, Replacement and Reliability*. Birmingham: Pitman Publishing.

A. B. M. Z. Kabir (1996), "Evaluation of overhaul/replacement policy for a fleet of buses," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 2, pp. 49-59.

B. Kardon & L. D. Fredendall (2002), "Incorporating overall probability of system failure into a preventive maintenance model for a serial system," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 8, pp. 331-345.

W. J. Kennedy, J. W. Patterson, et al. (2002), "An overview of recent literature on spare parts inventories," *International Journal of Production Economics*, vol. 76, pp. 201-215.

M. Kijima (1989), "Some results for repairable systems with general repair," *Journal of Applied Probability*, vol. 26, pp. 89-102.

C. H. Kuei & C. N. Madu (1994), "Polynomial metamodelling and Taguchi designs in simulation with application to the maintenance float system," *European Journal of Operational Reseach*, vol. 72, pp. 364-375.

A. L. F. Leitão, "A aplicação do teste de Laplace e a relação entre taxa de avarias e função de risco," presented at Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática, Universidade do Minho, 1998.

F. K. N. Leung & A. L. M. Cheng (2000), "Determining replacement policies for bus engines," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 17, pp. 771-783.

B. Levine (1965), "Estimating maintenance float factors on the basis of reliability," *Theory in Industrial Quality Control*, vol. 4, pp. 401-405.

W.-p. Liao & J. Yuan (1998), "Optimal replacement for one-unit system subject to delivery and test," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 4, pp. 51-65.

T.-J. Lim & C. H. Lie (2000), "Analysis of system reliability with dependent repair modes," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 49, pp. 153-162.

D. Lin, M. J. Zuo, et al. (2001), "Sequential imperfect preventive maintenance models with two categories of failure modes," *Naval Research Logistics*, vol. 48, pp. 172-183.

C. N. Madu & C. H. Kuei (1992a), "Group screening and Taguchi design in the optimization of multi-echelon maintenance float simulation metamodels," *Computers and Operations Research* vol. 19, pp. 95-105.

C. N. Madu & C. H. Kuei (1992b), "Simulation metamodels of system availability and optimum spare and repair units," *IIE Transactions*, vol. 24, pp. 99-104.

C. N. Madu, P. Lyeu, et al. (1994), "On the use of simulation metamodeling in solving system availability problems," *Microelectronics Reliability*, vol. 34, pp. 1147-1160.

I. E. Madu (1999), "Robust regression metamodel for a maintenance float policy," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 16, pp. 433-456.

H. Makabe & H. Morimura (1963), "On some preventive maintenance policies," *Journal of Operations Research Society of Japan*, vol. 6, pp. 17-47.

P. Massa & A. L. F. Leitão (1997), "Metodologia e análise da fiabilidade de sistemas reparáveis," *Manutenção*, pp. 8-13.

S. Mathew & D. Kennedy (2002), "Minimising equipment down time under shock load conditions," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 19, pp. 90-96.

H. Morimura (1970), "On some preventive maintenance policies for IFR," *Journal of Operations Research Society of Japan*, vol. 12, pp. 94-125.

E. J. Muth (1977), "An optimal decision rule for repair vs replacement," *IEEE trans.*, vol. R-26, pp. 179-181.

T. Nakagawa (1980), "Replacement models with inspection and preventive maintenance," *Microelectronics and Reliability*, vol. 20, pp. 427-433.

T. Nakagawa (1986), "Periodic and sequential preventive maintenance policies," *Journal of Applied Probability*, vol. 23, pp. 536-42.

T. Nakagawa & M. Kowada (1983), "Analysis of a system with minimal repair and its application to replacement policy," *European Journal of Operational Research*, vol. 12, pp. 176-82.

T. Nakagawa & S. Osaki (1974), "Optimum replacement policies with delay," *Journal of Applied Probability*, vol. 11, pp. 102-10.

P. D. T. O´Connor (1995), *Practical Reliability Engineering*, Third Edition Revised ed. England: John Wiley & Sons.

K. S. Park (1979), "Optimal number of minimal repairs before replacement," *IEEE Transactions*, vol. R-28, pp. 137-140.

Y. Perlman, A. Mehrez, et al. (2001), "Setting Expediting Repair Policy in a Multi-echelon repairable-item Inventory System with Limited Repair Capacity," *Journal of the Operations Research Society*, vol. 52, pp. 198-209.

A. Ran & S. I. Rosenlund (1976), "Age replacement with discounting for a continuous maintenance cost model," *Technometrics*, vol. 18, pp. 459-465.

C. R. Reddy & D. V. B. Rao (1996), "Cost-optimal Maintenance Policies with Increasing Hazard Rate," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 2, pp. 60-65.

Y. Roll & A. Sachish (1978), "Combined overhaul and replacement policies for deteriorating equipment," *Journal of Operations Research Society of Japan*, vol. 21, pp. 274-86.

B. R. Sarker & J. Yu (1995), "A balanced maintenance schedule for a failure-prone system," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 12, pp. 183-191.

P. A. Scarf & O. Bouamra (1999), "A capital equipment replacement model for fleet with variable size," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 5, pp. 40-49.

R. L. Schaeffer (1971), "Optimum age replacement policies with increasing cost factor," *Technometrics*, vol. 13, pp. 139-144.

G. Shankar & V. Sahani (2003), "Reliability analysis of a maintenance network with repair and preventive maintenance," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 20, pp. 268-280.

C. C. Sherbrooke (1968), "METRIC: A multi-echelon technique for recoverable item control," *Operations Research*, vol. 16, pp. 122-141.

D. J. Sherwin & B. Al-Najjar (1999), "Practical models for condition monitoring inspection intervals," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 5, pp. 203-220.

S.-H. Sheu & W. S. Griffith (2001), "Optimal Age Replacement Policy with Age-Dependent Minimal-Repair and Random-Leadtime," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 50, pp. 302-309.

B. D. Sivazlian (1973), "On a discounted replacement problem with arbitrary repair time distribution," *Management Science*, vol. 19, pp. 1301-1309.

V. Sridharan & P. Mohanavadivu (1997), "Cost benefit analysis of one server two dissimilar unit system subject to different repair strategies," *International Journal of Quality & Reliability Management*, vol. 14, pp. 491-504.

M. S. Talukder & G. M. Knapp (2002), "Equipment assignment to multiple overhaul blocks in series systems," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 8, pp. 319-330.

M. Xie, H. Kong, et al. (2000), "Exponential approximation for maintained Weibull distributed component," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 6, pp. 260-268.

W. Y. Yun & C. H. Choi (2000), "Optimum Replacement Intervals with Random Time Horizon," *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, vol. 6, pp. 269-274.

A. Z. Zeng & T. Zhang (1997), "A queuing model for designing an optimal three-dimensional maintenance float system," *Computers & Operations Research*, vol. 24, pp. 85-95.

T. Zhang & M. Horigome (2001), "Availability and reliability of system with dependent components and time-varying failure and repair rates," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 50, pp. 151-158.

Y. L. Zhang (2002), "A geometric-process repair-model with good-as-new preventive repair," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 51, pp. 223-28.

APÊNDICE I

Para L<R

$$D = \overline{F(T)}.\left\{\begin{matrix} T + (\overline{A_L} \cap A_R).P_{NF}.\tau_{a1} + (\overline{A_L} \cap A_R).P_F.[t_1 + z_1] + \\ (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).P_{NF}.\tau_{a2} + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).P_F.[t_2 + z_2] \end{matrix}\right\} +$$

$$+ \int_0^T f(t).\left\{t + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\tau_{b2}\right\}.dt$$

Para L ≥ R

$$D = \overline{F(T)}.\left\{T + (\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{a3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{a4}\right\} +$$

$$+ \int_0^T f(t).\left\{t + (\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{b3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{b14}\right\}.dt$$

Simplificando

Para L<R

$$D = e^{-\lambda_f T}.\left\{T + (\overline{A_L} \cap A_R).\left[P_{NF}.\tau_{a1} + P_F.(t_1 + z_1)\right] + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\left[P_{NF}.\tau_{a2} + P_F.(t_2 + z_2)\right]\right\} +$$

$$+ \int_0^T \lambda_f.e^{-\lambda_f t}.\left\{t + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\tau_{b2}\right\}.dt$$

Para L ≥ R

$$D = e^{-\lambda_f T}.\left\{T + (\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{a3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{a4}\right\} + \int_0^T \lambda_f.e^{-\lambda_f t}.\left\{t + (\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{b3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{b4}\right\}.dt$$

Simplificando

Para L<R

$$D = e^{-\lambda_f T}.\left\{T + (\overline{A_L} \cap A_R).\left[P_{NF}.\tau_{a1} + P_F.(t_1 + z_1)\right] + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\left[P_{NF}.\tau_{a2} + P_F.(t_2 + z_2)\right]\right\} +$$
$$+ \int_0^T t.\lambda_f.e^{-\lambda_f t}.dt + \int_0^T (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\tau_{b2}.\lambda_f.e^{-\lambda_f t}.dt$$

Para L ≥ R

$$D = e^{-\lambda_f T}.\left\{T + (\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{a3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{a4}\right\} +$$
$$\int_0^T t.\lambda_f.e^{-\lambda_f t}.dt + \int_0^T \left\{(\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{b3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{b4}\right\}\lambda_f.e^{-\lambda_f t} dt$$

Simplificando

Para L<R

Sendo

$$\int_0^T t.e^{-\lambda_f t} dt = -\frac{T}{\lambda_f}.e^{-\lambda_f T} - \frac{1}{\lambda_f^2}(e^{-\lambda_f T} - 1)$$

(dedução no apêndice III)

$$D = e^{-\lambda_f T}.\left\{T + (\overline{A_L} \cap A_R).\left[P_{NF}.\tau_{a1} + P_F.(t_1 + z_1)\right] + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\left[P_{NF}.\tau_{a2} + P_F.(t_2 + z_2)\right]\right\} +$$
$$+ \left\{-T.e^{-\lambda_f T} - \frac{1}{\lambda_f}(e^{-\lambda_f T} - 1)\right\} + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\tau_{b2}.\left[-e^{-\lambda_f t}\right]_0^T$$

Para L ≥ R

$$D = e^{-\lambda_f T}.\left\{T + (\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{a3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{a4}\right\} + \left\{-T.e^{-\lambda_f T} - \frac{1}{\lambda_f}(e^{-\lambda_f T} - 1)\right\}$$
$$+ \left\{(\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{b3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{b4}\right\}.\left[-e^{-\lambda_f t}\right]_0^T$$

Simplificando

Para L<R

$$D = e^{-\lambda_f T}.\left\{T + (\overline{A_L} \cap A_R).\left[P_{NF}.\tau_{a1} + P_F.(t_1 + z_1)\right] + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\left[P_{NF}.\tau_{a2} + P_F.(t_2 + z_2)\right]\right\} +$$
$$+ \left\{-T.e^{-\lambda_f T} - \frac{1}{\lambda_f}(e^{-\lambda_f T} - 1)\right\} + (\overline{A_L} \cap \overline{A_R}).\tau_{b2}.\left[1 - e^{-\lambda_f T}\right]$$

Para L ≥ R

$$D = e^{-\lambda_f T}.\left\{T + (\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{a3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{a4}\right\} + \left\{-T.e^{-\lambda_f T} - \frac{1}{\lambda_f}(e^{-\lambda_f T} - 1)\right\}$$
$$+ \left\{(\overline{A_R} \cap A_L).\tau_{b3} + (\overline{A_R} \cap \overline{A_L}).\tau_{b4}\right\}.\left[1 - e^{-\lambda_f T}\right]$$

APÊNDICE II

Considerando que Y segue uma distribuição de Poisson com parâmetro λ_s, e que t segue uma distribuição Exponencial Negativa com parâmetro μ, a probabilidade de Y tomar um determinado valor y no intervalo (0,t] dado que $t \le x$, é dado por:

$$\Pr(Y = y / t \le x) = \frac{\Pr((Y = y) \wedge (t \le x))}{\Pr(t \le x)}$$

($\lambda_s t$ é o número médio de avarias; t é o tempo entre saídas do centro de manutenção)

⇔

$$\Pr(Y = y / t \le x) = \frac{\int_0^x \frac{e^{-\lambda_s t}.(\lambda_s t)^y}{y!}.\mu.e^{-\mu t}.dt}{\int_0^x \mu.e^{-\mu t}.dt}$$

e

$$\Pr(Y = y) = \lim_{x \to \infty} \Pr(Y = y / t \le x)$$

⇔

$$\Pr(Y = y) = \frac{\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda_s t}.(\lambda_s t)^y}{y!}.\mu.e^{-\mu t}.dt}{\int_0^\infty \mu.e^{-\mu t}.dt}$$

Sendo $\int_0^\infty \mu.e^{-\mu t}.dt = 1$,

$$\Pr(Y = y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_s t}.(\lambda_s t)^y}{y!}.\mu.e^{-\mu t}.dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\Pr(Y = y) = \int_0^{\infty} \mu.e^{-\mu t}.\frac{e^{-\lambda_s t}.(\lambda_s t)^y}{y!}.dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\Pr(Y = y) = \frac{\mu.\lambda_s^y}{y!}\int_0^{\infty} t^y.e^{-(\mu+\lambda_s)t}.dt$$

$\Leftrightarrow$

$$\Pr(Y = y) = \frac{\mu.\lambda_s^y}{y!}.\frac{y!}{(\mu+\lambda_s)^{y+1}} = \frac{\mu.\lambda_s^y}{(\mu+\lambda_s)^{y+1}}$$

O valor esperado de Y, E[Y] é:

$$E[Y] = \sum_{y=0}^{\infty} y \Pr(Y = y) = \sum_{y=0}^{\infty} y \int_0^{\infty} \mu.e^{-\mu t}.\frac{e^{-\lambda_s t}.(\lambda_s t)^y}{y!}.dt$$

$\Leftrightarrow$

$$E[Y] = \int_0^{\infty} \mu.e^{-\mu t}.\sum_{y=0}^{\infty} y\,\frac{e^{-\lambda_s t}.(\lambda_s t)^y}{y!}.dt$$

Sendo $\sum_{y=0}^{\infty} y\,\frac{e^{-\lambda_s t}.(\lambda_s t)^y}{y!}$, o somatório que corresponde à expressão do valor esperado de Y para t fixo e $E[Y,t]=\lambda_s.t$ então:

$$E[Y] = \int_0^{\infty} \mu.e^{-\mu t}.\lambda_s t.dt$$

$\Leftrightarrow$

$$E\left[Y\right] = \mu.\lambda_s \int_0^\infty t.e^{-\mu t}.dt$$

$\Leftrightarrow$

$$E\left[Y\right] = \mu.\lambda_s.\frac{1}{\mu^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$E\left[Y\right] = \frac{\lambda_s}{\mu}$$

APÊNDICE III

$$t_v = \int_0^\infty \int_0^t \mu^{r+1} . \frac{t^r e^{-\mu t}}{r!} . \lambda_f e^{-\lambda_f t_2} . t_2 . dt_2 . dt / P_F$$

$$= \frac{\mu^{r+1}}{r!} . \lambda_f . \int_0^\infty t^r e^{-\mu t} . \int_0^t e^{-\lambda_f t_2} . t_2 . dt_2 . dt / P_F$$

Sendo

$$\int_0^t t_2 . e^{-\lambda_f t_2} dt_2 = \left[- \frac{t_2}{\lambda_f} . e^{-\lambda_f t_2} \right]_0^t - \int_0^t (-1) . \frac{e^{-\lambda_f t_2}}{\lambda_f} dt$$

$$= - \frac{t}{\lambda_f} . e^{-\lambda_f t} - \left[\frac{e^{-\lambda_f t_2}}{\lambda_f^2} \right]_0^t$$

$$= - \frac{t}{\lambda_f} . e^{-\lambda_f t} - \frac{1}{\lambda_f^2} (e^{-\lambda_f t} - 1)$$

então

$$t_v = \frac{\mu^{r+1}}{r!} . \lambda_f . \int_0^\infty t^r e^{-\mu t} . \left[- \frac{t}{\lambda_f} . e^{-\lambda_f t} - \frac{1}{\lambda_f^2} (e^{-\lambda_f t} - 1) \right] . dt / P_F$$

$$= \frac{\mu^{r+1}}{r!} . \int_0^\infty t^r e^{-\mu t} . \left[- t . e^{-\lambda_f t} - \frac{1}{\lambda_f} (e^{-\lambda_f t} - 1) \right] . dt / P_F$$

$$= \frac{\mu^{r+1}}{r!} . \left[- \int_0^\infty t^{r+1} e^{-(\mu + \lambda_f) t} . dt - \frac{1}{\lambda_f} \int_0^\infty t^r \cdot e^{-\mu t} . (e^{-\lambda_f t} - 1) . dt \right] / P_F$$

$$= \frac{\mu^{r+1}}{r!} \cdot \left[-\int_0^\infty t^{r+1} e^{-(\mu+\lambda_f)t} .dt - \frac{1}{\lambda_f} \cdot \left\{ \int_0^\infty t^r \cdot e^{-(\mu+\lambda_f)t} dt - \int_0^\infty t^r \cdot e^{-\mu t} .dt \right\} \right] / P_F$$

$$= \frac{\mu^{r+1}}{r!} \cdot \left[-\frac{(r+1)!}{(\mu+\lambda_f)^{r+2}} - \frac{1}{\lambda_f} \cdot \left\{ \frac{r!}{(\mu+\lambda_f)^{r+1}} - \frac{r!}{\mu^{r+1}} \right\} \right] / P_F$$

$$= \mu^{r+1} \cdot \left[-\frac{r+1}{(\mu+\lambda_f)^{r+2}} - \frac{1}{\lambda_f} \cdot \left\{ \frac{1}{(\mu+\lambda_f)^{r+1}} - \frac{1}{\mu^{r+1}} \right\} \right] / P_F$$

APÊNDICE IV

Tabelas de Resultados Relativos ao Modelo de Probabilidades

Tabela I: Medidas de desempenho do sistema com M=10, R=2, L= 3, μ_{REP}=0.5, μ_{REV}=1.3, λ= 0.3 e valores diferentes para T.

T	ε	Pwq	Lq	Psu	Nnr	Nfnr	NL
2	0	0,595843	0,99728	0,777782	1,593123	0,718799	1,045804
	0,051012	0,617	1,109783	0,790497	1,726784	0,835717	1,174334
	0,055546	0,618984	1,120702	0,791682	1,739685	0,847176	1,186882
	0,055983	0,619176	1,121764	0,791797	1,74094	0,848292	1,188103
	0,056026	0,619195	1,121867	0,791808	1,741062	0,8484	1,188222
	0,05603	0,619196	1,121876	0,791808	1,741073	0,84841	1,188233
4	0	0,6267	1,27658	0,78608	1,90328	1,33002	1,51878
	0,05276	0,67126	1,53645	0,81403	2,20771	1,62382	1,826
	0,06069	0,67873	1,58265	0,81868	2,26138	1,67632	1,88075
	0,06208	0,68006	1,59095	0,8195	2,27101	1,68576	1,89059
	0,06232	0,6803	1,59245	0,81965	2,27275	1,68746	1,89236
	0,06237	0,68034	1,59272	0,81968	2,27306	1,68777	1,89268
6	0	0,676	1,61342	0,81303	2,28942	1,91098	2,02272
	0,04123	0,73706	2,01753	0,85133	2,75459	2,38245	2,50429
	0,0487	0,7497	2,1077	0,85918	2,85741	2,48773	2,61165
	0,05033	0,75253	2,12822	0,86093	2,88075	2,51169	2,63608
	0,05071	0,75318	2,13291	0,86133	2,88609	2,51717	2,64167
	0,05079	0,75333	2,13398	0,86142	2,88731	2,51843	2,64295
	0,05081	0,75336	2,13423	0,86144	2,88759	2,51871	2,64324
8	0	0,73646	2,02296	0,84937	2,75942	2,50909	2,57591
	0,02902	0,80477	2,53644	0,89179	3,34121	3,11171	3,18472
	0,03434	0,81898	2,65206	0,90052	3,47104	3,24723	3,32152
	0,03551	0,82218	2,67857	0,90248	3,50075	3,2783	3,35289
	0,03578	0,82292	2,68468	0,90293	3,5076	3,28547	3,36012
	0,03585	0,82309	2,68609	0,90303	3,50918	3,28712	3,36179
	0,03586	0,82313	2,68642	0,90306	3,50955	3,2875	3,36217

Tabela II: Medidas de desempenho do sistema com M=10, L=3, T=4, μ_{REP}=0.5, μ_{REV}=1.3, λ=0.3 e valores diferentes de R.

R	ε	**P_{wq}**	**L_q**	**P_{su}**	**N_{nr}**	**N_{fnr}**	**N_L**
1	0	0,5943	0,99698	0,91672	2,37239	1,65784	2,07210
	0,04851	0,6309	1,16871	0,92651	2,60333	1,87592	2,30802
	0,05458	0,63595	1,19355	0,92785	2,63632	1,90742	2,34197
	0,05544	0,63668	1,19714	0,92804	2,64108	1,91198	2,34689
	0,05557	0,63678	1,19766	0,92807	2,64177	1,91264	2,3476
	0,05559	0,6368	1,19774	0,92807	2,64188	1,91274	2,3477
2	0	0,6267	1,27658	0,78608	1,90328	1,33002	1,51878
	0,05276	0,67126	1,53645	0,81403	2,20771	1,62382	1,826
	0,06069	0,67873	1,58265	0,81868	2,26138	1,67632	1,88075
	0,06208	0,68006	1,59095	0,8195	2,27101	1,68576	1,89059
	0,06232	0,6803	1,59245	0,81965	2,27275	1,68746	1,89236
	0,06237	0,68034	1,59272	0,81968	2,27306	1,68777	1,89268
3	0	0,6406	1,55539	0,6406	1,55539	1,08692	1,08692
	0,05703	0,69358	1,92642	0,69358	1,92642	1,45606	1,45606
	0,06714	0,70419	2,00627	0,70419	2,00627	1,53669	1,53669
	0,06928	0,70649	2,02383	0,70649	2,02383	1,55447	1,55447
	0,06975	0,70699	2,02771	0,70699	2,02771	1,55841	1,55841
	0,06985	0,7071	2,02857	0,7071	2,02857	1,55928	1,55928
	0,06988	0,70713	2,02876	0,70713	2,02876	1,55947	1,55947
4	0	0,64831	1,79998	0,52485	1,27513	0,76552	0,76552
	0,06104	0,70849	2,30305	0,60357	1,69948	1,17002	1,17002
	0,07355	0,72265	2,43197	0,62223	1,80974	1,2779	1,2779
	0,07671	0,72632	2,46609	0,62708	1,83901	1,30672	1,30672
	0,07754	0,7273	2,47521	0,62837	1,84684	1,31444	1,31444
	0,07776	0,72756	2,47765	0,62871	1,84894	1,31651	1,31651
	0,07782	0,72763	2,47831	0,62881	1,84951	1,31707	1,31707
	0,07784	0,72765	2,47849	0,62883	1,84966	1,31722	1,31722
5	0	0,65258	2,00016	0,42949	1,03829	0,52091	0,52091
	0,06427	0,71834	2,6461	0,52859	1,49843	0,93346	0,93346
	0,07919	0,73613	2,83912	0,55611	1,64031	1,06635	1,06635
	0,08357	0,74154	2,89937	0,56453	1,68496	1,10863	1,10863
	0,08493	0,74324	2,91847	0,56718	1,69914	1,12211	1,12211
	0,08536	0,74378	2,92455	0,56803	1,70366	1,12641	1,12641
	0,08549	0,74395	2,92649	0,5683	1,7051	1,12778	1,12778
	0,08554	0,744	2,92711	0,56838	1,70556	1,12822	1,12822
6	0	0,65488	2,14841	0,34817	0,82931	0,34630	0,34630
	0,0666	0,72475	2,94547	0,46239	1,31238	0,732	0,732
	0,08386	0,74605	3,21617	0,49898	1,4846	0,88499	0,88499

	0,0896	0,75345	3,31362	0,51189	1,54753	0,94194	0,94194
	0,09166	0,75614	3,34947	0,5166	1,5708	0,96314	0,96314
	0,09241	0,75714	3,36277	0,51835	1,57944	0,97103	0,97103
	0,09269	0,75751	3,36772	0,519	1,58266	0,97397	0,97397
	0,0928	0,75764	3,36957	0,51924	1,58386	0,97507	0,97507
	0,09284	0,75769	3,37025	0,51933	1,58431	0,97548	0,97548
7	0	0,65623	2,25638	0,27871	0,64999	0,22117	0,22117
	0,06825	0,72886	3,19139	0,40172	1,13237	0,56711	0,56711
	0,0875	0,75321	3,55096	0,44682	1,33267	0,72753	0,72753
	0,09467	0,76275	3,69834	0,46497	1,41673	0,79711	0,79711
	0,09759	0,7667	3,76052	0,47257	1,45251	0,8271	0,8271
	0,09881	0,76838	3,78707	0,47581	1,46785	0,84003	0,84003
	0,09934	0,7691	3,79848	0,4772	1,47445	0,8456	0,8456
	0,09956	0,7694	3,80339	0,47779	1,47729	0,848	0,848
	0,09966	0,76954	3,8055	0,47805	1,47851	0,84903	0,84903
	0,0997	0,76959	3,80641	0,47816	1,47904	0,84948	0,84948
8	0	0,65706	2,33181	0,21973	0,49838	0,13448	0,13448
	0,06937	0,73158	3,39195	0,34598	0,96382	0,43026	0,43026
	0,09032	0,75843	3,83911	0,39785	1,1816	0,59265	0,59265
	0,09881	0,76993	4,04191	0,42106	1,28386	0,67246	0,67246
	0,10261	0,77521	4,13724	0,4319	1,33262	0,71125	0,71125
	0,1044	0,77771	4,18283	0,43706	1,35609	0,73007	0,73007
	0,10525	0,77891	4,20481	0,43955	1,36744	0,73921	0,73921
	0,10566	0,77949	4,21545	0,44075	1,37294	0,74365	0,74365
	0,10585	0,77977	4,22061	0,44134	1,37561	0,74581	0,74581
	0,10595	0,7799	4,22312	0,44162	1,37691	0,74686	0,74686
	0,106	0,77997	4,22434	0,44176	1,37754	0,74737	0,74737

Tabela III: Medidas de desempenho do sistema com M=10, R= 2, T= 4, μ_{REP}=0.5, μ_{REV}=1.3, λ= 0.3 e valores diferentes de L.

L	ε	P_{wq}	L_q	P_{su}	N_{nr}	N_{fnr}	N_L
2	0	0,80197	2,76285	0,80197	2,76285	1,93070	1,93070
	0,08481	0,86047	3,57922	0,86047	3,57922	2,80473	2,80473
	0,10901	0,87884	3,87544	0,87884	3,87544	3,13065	3,13065
	0,11822	0,88598	3,9964	0,88598	3,9964	3,26518	3,26518
	0,12206	0,88897	4,04818	0,88897	4,04818	3,32302	3,32302
	0,12372	0,89026	4,07079	0,89026	4,07079	3,34833	3,34833
	0,12445	0,89083	4,08074	0,89083	4,08074	3,35949	3,35949
	0,12477	0,89108	4,08514	0,89108	4,08514	3,36442	3,36442
	0,12491	0,89119	4,08709	0,89119	4,08709	3,3666	3,3666
	0,125	0,89126	4,08834	0,89126	4,08834	3,368	3,368
	0,12497	0,89124	4,08795	0,89124	4,08795	3,36757	3,36757
3	0	0,6267	1,27658	0,78608	1,90328	1,33002	1,51878
	0,05276	0,67126	1,53645	0,81403	2,20771	1,62382	1,826
	0,06069	0,67873	1,58265	0,81868	2,26138	1,67632	1,88075
	0,06208	0,68006	1,59095	0,8195	2,27101	1,68576	1,89059
	0,06232	0,6803	1,59245	0,81965	2,27275	1,68746	1,89236
	0,06237	0,68034	1,59272	0,81968	2,27306	1,68777	1,89268
4	0	0,43399	0,52548	0,81742	1,60177	1,11932	1,44349
	0,03409	0,45451	0,5872	0,82771	1,7001	1,20806	1,54326
	0,0367	0,4562	0,59242	0,82855	1,70833	1,21553	1,55164
	0,03691	0,45634	0,59285	0,82862	1,70902	1,21615	1,55234
	0,03693	0,45635	0,59289	0,82863	1,70907	1,21621	1,55239
5	0	0,2642	0,19999	0,86501	1,64223	1,14760	1,58199
	0,02389	0,2715	0,21365	0,86876	1,67604	1,17633	1,61679
	0,02493	0,27184	0,21428	0,86893	1,67759	1,17765	1,61839
	0,02497	0,27185	0,21431	0,86894	1,67766	1,17771	1,61846
6	0	0,2642	0,19999	0,86501	1,64223	1,14760	1,58199
	0,02389	0,2715	0,21365	0,86876	1,67604	1,17633	1,61679
	0,02493	0,27184	0,21428	0,86893	1,67759	1,17765	1,61839
	0,02497	0,27185	0,21431	0,86894	1,67766	1,17771	1,61846
7	0	0,05366	0,01766	0,92494	1,91603	1,33893	1,91071
	0,01426	0,05408	0,01812	0,92527	1,91922	1,34142	1,91402
	0,01454	0,05409	0,01814	0,92528	1,91928	1,34147	1,91408
	0,01455	0,05409	0,01814	0,92528	1,91928	1,34147	1,91409